

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E  
TECNOLÓGICA INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE  
RONDÔNIA - CAMPUS CACOAL

ALEXANDRO ANDREZA PEREIRA

NÚMEROS COMPLEXOS: HISTÓRIA E APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

CACOAL – RO  
2021

ALEXANDRO ANDREZA PEREIRA

## NÚMEROS COMPLEXOS: HISTÓRIA E APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

Trabalho de conclusão de curso na modalidade artigo apresentado a Coordenação de Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia – IFRO, Campus Cacoal, como requisito para obtenção de aprovação no curso, sob a orientação da professora Maily Marques Pereira.

CACOAL  
2021

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE RONDÔNIA**

Cacoal - Código INEP: 11109815  
Rodovia BR 364, Lote 2A, CEP 76960-970, Cacoal (RO)  
CNPJ: 10.817.343/0008-73 - Telefone: (69) 2182 9641

## ATA DE DEFESA DE ARTIGO CIENTÍFICO

Na data 16/12/2021 realizou-se a sessão pública de defesa do Artigo Científico intitulada Números Complexos: História e Aplicações Geométricas apresentada pelo aluno Alexandro Andreza Pereira (2018106043002-0) do Curso Licenciatura em Matemática (Cacoal). Os trabalhos foram iniciados às 19:30 pelo Professor Maily Marques Pereira presidente da banca examinadora, constituída pelos seguintes membros:

- **Maily Marques Pereira** (Orientadora)
- **Claudemir Miranda Barboza** (Examinador Interno)
- **Jorge da Silva Werneck** (Examinador Externo)

A banca examinadora, tendo terminado a apresentação do conteúdo do Artigo Científico, passou à arguição do candidato. Em seguida, os examinadores reuniram-se para avaliação e deram o parecer final sobre o trabalho apresentado pelo aluno, tendo sido atribuído o seguinte resultado:

**[X] APROVADO**

**Nota: 100**

Proclamados os resultados pelo presidente da banca examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, eu Maily Marques Pereira lavrei a presente ata que assino juntamente com os demais membros da banca examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Alexandro Andreza Pereira**, Discente, em 20/12/2021, às 09:46, conforme horário oficial de Rondônia, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Maily Marques Pereira**, Orientador, em 17/12/2021, às 18:13, conforme horário oficial de Rondônia, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Claudemir Miranda Barboza**, Examinador Interno, em 17/12/2021, às 11:18, conforme horário oficial de Rondônia, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Jorge da Silva Werneck**, Examinador Externo, em 16/12/2021, às 23:26, conforme horário oficial de Rondônia, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma linhagem histórica do surgimento do conjunto dos números complexos, cuja qual foi feita de maneira bibliográfica, baseando-se em livros, artigos, dissertações e outras literaturas. Em seu desenvolvimento utilizou-se uma metodologia qualitativa, assim como análises das referências. Os objetivos do artigo são esclarecer historicamente os problemas que motivaram estudiosos a desenvolverem a teoria dos números complexos bem como expor a interdisciplinaridade desse conjunto com a geometria, por meio da extração da enésima raiz de um número e a ligação dessas raízes com os vértices de polígonos regulares. Os números complexos surgiram para resolver problemas dentro da própria matemática e foram mais de 200 anos para a ideia ser aceita e matemáticos começarem a operar sem medo de usarem uma ideia considerada absurda. Durante esse tempo, muitos foram os estudiosos que fizeram as suas contribuições para o entendimento desse corpo. Sendo assim, esta pesquisa apresentou a história do surgimento dos complexos e os problemas que incentivaram estudiosos a admitirem que os números reais se faziam insuficientes para as soluções de equações.

**Palavras-chave:** Números complexos; Matemática; Geometria.

## ABSTRACT

This article presents a historical lineage of the emergence of the set of complex numbers, which was done in a bibliographical way, based on books, articles, dissertations and other literatures. In its development a qualitative methodology was used, as well as analysis of references. The objectives of the article are to clarify historically the problems that motivated scholars to develop the theory of complex numbers, as well as to expose the interdisciplinarity of this set with geometry, through the extraction of the umpteenth root of a number and the connection of these roots with the vertices of regular polygons. Complex numbers emerged to solve problems within mathematics itself and it took more than 200 years for the idea to be accepted and mathematicians began to operate without fear of using an idea considered absurd. During this time, many scholars have made their contributions to the understanding of this body. Therefore, this research presented the history of the emergence of complexes and the problems that encouraged scholars to admit that real numbers were insufficient for the solutions of equations.

**Keywords:** Complex Numbers; Mathematics; Geometry.

## 1. Introdução

Desde os primórdios da humanidade o ser humano vem se desenvolvendo constantemente nas mais diversas áreas de conhecimento, passando por inúmeros processos evolutivos que propiciaram o que se conhece no mundo moderno. Dentro da matemática não foi diferente, diversos autores e pensadores foram cruciais ao desenvolverem teorias e ideias que são aceitas, utilizadas e aplicadas até a atualidade, a exemplo dos números complexos.

A teoria dos números complexos, dentro da matemática, foi desenvolvida com o objetivo de entender e representar o valor de raiz quadrada com o radicando menor que zero. Neste artigo, compreenderemos melhor seu conceito, o contexto histórico evolutivo que a engloba e algumas questões e aplicações da contemporaneidade.

O presente trabalho é uma pesquisa qualitativa desenvolvida totalmente de forma bibliográfica. Segundo Gil (2002, p.44) “[...] a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos”.

A pesquisa foi realizada metodologicamente de forma qualitativa e como destaca Borba e Araújo (2013, p.25) “pesquisas realizadas segundo uma abordagem qualitativa nos fornecem informações mais descritivas, que primam pelos significados dados às ações”. Uma pesquisa qualitativa busca compreender, interpretar e relativamente significar o motivo de certo fenômeno acontecer, segundo Denzin e Lincoln (2006, p.17).

[...] a pesquisa qualitativa é uma atividade que localiza o observador no mundo. Consistem em um conjunto de práticas materiais e interpretativas que dão visibilidade ao mundo. [...] a pesquisa qualitativa envolve uma abordagem naturalista, interpretativa, para mundo, o que significa que seus pesquisadores estudam as coisas em seus cenários naturais, tentando entender, ou interpretar, os fenômenos em termos dos significados que as pessoas a eles conferem.

Um número complexo é da forma  $z = a + bi$ , onde  $a e b \in \mathcal{R}$  e  $i = \sqrt{-1}$ . Tal teoria surgiu após matemáticos começarem a trabalhar com soluções de equações cúbicas reduzidas do tipo  $x^3 + px + q = 0$ . Estudiosos como Girolamo Cardano, Rafael Bombelli, Leonard Euler, Jean Robert Argand e Gauss deram grandes

contribuições na compreensão da ideia de raiz negativa. Os primeiros estudos e algumas definições e operações foram realizadas por Bombelli, porém, esse conjunto só ganhou status quando Gauss utilizou a ideia para demonstrar o teorema fundamental da álgebra que diz que todo polinômio  $p(x)$  com grau maior ou a igual 1, possui ao menos uma raiz complexa.

Este trabalho busca entender os problemas que motivaram tais matemáticos a desenvolverem os números complexos e os obstáculos que a teoria teve para ser aceita, bem como discorrer aplicações dos complexos na geometria com a representação das enésimas raízes de um número qualquer no plano de Argand-Gauss.

A primeira parte deste artigo tratará sobre a história do desenvolvimento da teoria dos complexos, em seguida mostrar-se-á algumas propriedades desse conjunto como a primeira e a segunda lei de Moivre e a última parte demonstra a representação das enésimas raízes no plano dos complexos explanando a teoria e resolvendo questões sobre o assunto.

## 2. Uma abordagem histórica: O problema que motivou o estudo dos complexos

Encontrar métodos para resolver equações é uma prática que existe desde os tempos da Grécia antiga. Os gregos utilizavam régua e compasso para resolver equações do segundo grau, entretanto, com a invasão dos Romanos muitos estudos gregos foram perdidos. (SOUSA, 2015, p.8).

As equações do 2º grau apareceram há cerca de 1700 anos a.c; nas tabuletas de argila da Suméria e, em alguns casos, levaram as raízes quadradas de números negativos. Os matemáticos gregos resolviam alguns tipos de equação do segundo grau com régua e compasso. A conquista da Grécia por Roma praticamente acabou com o domínio da matemática grega.

Com a chegada da Idade média o obscurantismo assolou a Europa no que tange o desenvolvimento da matemática, com isso muitos estudos foram feitos pelos árabes e hindus. Foi um matemático hindu chamado **Sridhara**, no século XI que

encontrou a fórmula resolvente de uma equação do segundo grau (Toda equação do segundo grau é do tipo  $ax^2 + bx + c = 0$ ), a fórmula encontrada por ele é da seguinte forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Muitos livros ao introduzirem historicamente o conjunto dos complexos, apresentam como motivo do seu surgimento a resolução de equações de grau dois, cujo discriminante ( $\Delta = b^2 - 4ac$ ) era  $< 0$ , o que não é condizente com a realidade já que ao se depararem com equações que  $\Delta < 0$ , os matemáticos da época simplesmente ignoravam o fato. (COSTA, 2013, p.4).

Como sabemos dependendo da equação pode ocorrer do valor de  $b^2 - 4ac$  ser um número negativo. Porém, isso não perturbava os matemáticos da época, já que quando isso acontecia eles simplesmente afirmavam que a equação não possuía solução.

O estudo mais aprofundado de números complexos está intimamente ligado a soluções de equações de grau três.

Scipione Del Ferro foi um matemático italiano que nasceu em 1465, na cidade de Bolonha. Del ferro encontrou as soluções para as equações cúbicas reduzidas do tipo  $x^3 + px = q$ , porém, não publicou tal feito. Apesar disto, ensinou o método para um de seus alunos: Antônio Fior. Com o conhecimento em mãos do seu mestre Fior desafiou para o embate o matemático Nicolo Tartaglia. Esses desafios na época consistiam em cada matemático elaborar uma lista de problemas e um resolver o do outro, quem resolvesse mais problemas, ganhava. Fior fez a lista para Tartaglia com problemas envolvendo somente equações cúbicas incompletas já que ele detinha sob seu poder a fórmula que seu mestre o havia ensinado. O que Fior não contava era que Tartaglia descobriria também tal fórmula e resolveria todos os problemas que lhe foram impostos, fazendo com que Fior perdesse o desafio como destaca JUNIOR (2009, p.13).

Em 1535, Tartaglia finalmente conseguiu encontrar a solução de qualquer equação do tipo  $x^3 + px^2 = q$ . Na disputa entre Fior e Tartaglia, o objetivo era a solução de vários problemas que um deveria propor ao outro. Fior apresentou a Tartaglia, 30 problemas que eram solucionados pelo caso particular da cúbica, cujo método de solução já era conhecido por ele. Tartaglia é declarado o vencedor, já que, além de resolver todos os

problemas propostos por Fior, não teve seus problemas propostos resolvidos pelo oponente.

Em meio a esses desafios e as conversas que ocorriam na época, o Médico e Matemático Girolamo Cardano tomou conhecimento da fórmula. Cardano pediu para que Tartaglia revelasse a demonstração a ele, todavia, não obteve sucesso na primeira tentativa, pois Tartaglia queria publicar em seu próprio livro a demonstração. Com o tempo Cardano prometeu que não publicaria a fórmula e Tartaglia o revelou confiando em sua palavra. Contudo, em 1545, Cardano publica a demonstração da fórmula em seu livro ARS MAGNA como destaca Caon (2013, p.14).

Em 1544, ao tomar conhecimento do trabalho de Scipione Del ferro, Cardano descobriu que Tartaglia não havia sido o único a descobrir a fórmula para resolver as equações cúbicas. No entendimento de Cardano, isso o desobrigava de seu juramento. Assim, em 1545, publicou sua Ars Magna, na qual revelava a solução de equações cúbicas e quárticas, além de todo o seu trabalho produzido após o conhecimento da fórmula de Tartaglia.

A ideia que Cardano utilizou para demonstrar a fórmula é apresentada por Vieira (1999, p.13), reproduziremos essa demonstração com algumas alterações algébricas.

$$x^3 + px + q = 0$$

*fazendo  $x = A + B$ , temos que*

$$x^3 = (A + B)^3$$

$$x^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$$

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$$

$$x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = 0$$

Agora fazendo identidade de polinômios tem que,

$$x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = x^3 + px + q$$

Logo pode-se fazer a seguinte igualdade,

$$-3AB = p, \text{ elevando os dois lados ao cubo temos } -27A^3B^3 = p^3 \text{ e}$$

$$A^3 + B^3 = -q.$$

Agora se faz a seguinte substituição;

$$A^3 = u \text{ e } B^3 = v$$

$$\begin{cases} -27uv = p^3 \\ u + v = -q \end{cases} \text{ fazendo uma pequena manipulação algébrica ficamos como,}$$

$$\begin{cases} uv = -\frac{p^3}{27} \\ u + v = -q \end{cases}$$

Agora note que se tem a soma e o produto de duas raízes de um polinômio, e esse polinômio é da seguinte forma

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0$$

Como que u e v são raízes, calcular-se-á seu valor aplicando Bhaskara

$$y = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}$$

Ficando com,

$$u = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}$$

$$v = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}$$

$$A^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}$$

$$A = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}}$$

$$B^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}$$

$$B = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Por trabalhar na demonstração para poder publicar a fórmula das equações cúbicas reduzidas Cardano é um dos primeiros matemáticos a considerar a existência de raízes de números negativos, apesar de considerar e trabalhar com o problema, Cardano achava tal situação sofisticada e inútil. O seu percussor e aluno, Rafael Bombelli, começou a dar atenção para a situação e realmente considerar a existência da raiz quadrada de um número negativo, um dos famosos problemas que Bombelli trabalha é nas possíveis soluções da seguinte equação: “Qual a medida  $x$ , comum à aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com base de 15 unidades de área, sabendo que a diferença entre seus volumes é de 4 unidades?” (CAON, 2013, p.15). Equacionando, temos  $x^3 - 15x - 4 = 0$ , Bombelli na época sabia que 4 era solução do problema, com isso ele resolveu essa equação da seguinte maneira:

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4).(x^2 + 4x + 1) = 0$$

Resolvendo a equação  $x^2 + 4x + 1 = 0$ , podemos encontrar as outras duas raízes dessa equação, colocando na fórmula resolvente da equação do segundo grau fica-se com:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.1.1}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

Fazendo isso, Bombelli percebeu que essa equação admitia três raízes reais. Entretanto, resolvendo essa mesma equação pela fórmula de Cardano ele encontrou o seguinte problema: Se  $x^3 - 15x - 4$ , fazendo  $p = -15$  e  $q = -4$  e substituindo na fórmula fica-se com:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-(-4)}{2} + \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-(-4)}{2} - \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{(2)^2 + (-5)^3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{(2)^2 + (-5)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Ao se deparar com esse resultado Bombelli percebeu que os reais eram insuficientes, pois ele sabia que essa equação possuía três raízes reais, contudo como era possível trabalhar com raízes quadradas de números negativos, e isso sim motivou Bombelli e outros matemáticos a compreenderem o que realmente representava uma raiz quadrada com o radicando sendo menor que zero. Bombelli envolvido com esse problema desenvolveu algumas propriedades dos números complexos, como soma e subtração como destaca (COSTA, 2013, p.9)

Foi o italiano Rafael Bombelli, que em 1530, conseguiu resolver esta questão. De acordo com o seu relato em 1572, no livro *L' Algebra parte maggiore dell' Arithimetica*, sua ideia foi tratar os números  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$  e  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  como se fossem números da forma  $a + \sqrt{b}$  e  $a - \sqrt{b}$ , respectivamente. (COSTA 2013 p.9)

Bombelli trabalhou com as raízes negativas de forma normal, definiu algumas propriedades como multiplicação, adição e subtração, e chamou o seu trabalho de ideia louca como aponta Caon (2013, p.16) “Bombelli decidiu trabalhar como se as raízes quadradas de números negativos fossem verdadeiros números, o que chamou de “ideia louca”. O trabalho de Bombelli influenciou diversos matemáticos de sua época e posterior a seu tempo, ou seja, ele impulsionou e abriu caminhos para o estudo e surgimento dos números complexos, consoante ao que afirma (JUNIOR, (2009, p.28).

Sabemos que as regras apresentadas por Bombelli, que também são válidas para os números reais, abririam caminho para que no futuro, alguns matemáticos viessem conceber esses elementos munidos de operações e propriedades específicas como uma valiosa estrutura algébrica.

Apesar de Bombelli ter garantido um considerável avanço nos estudos dos complexos, ainda havia entre os matemáticos da época muita resistência em admitir a existência de raízes negativas. Por sempre assegurarem geometricamente a solução de equações, a abstração dos complexos ainda não era compreendida. Após Bombelli, alguns grandes nomes também operaram com os complexos. Leonard Euler foi quem introduziu o  $i$  à notação que é utilizada até hoje para a representação da unidade imaginária e foi Carl Frederic Gauss que imortalizou esse conjunto quando utilizou a ideia dos complexos para provar o teorema fundamental da álgebra. Hoje o plano que é utilizado tem seu nome junto com o de Argand, outro matemático que deu notáveis contribuições para a representação geométrica das ditas quantidades imaginárias.

Jean Robert Argand, que nasceu em 1768 na Suíça, teve a ideia de representar a quantidade imaginária no plano complexo. Ele afirma em seu artigo que o  $i$  representa geometricamente uma rotação no sentido anti-horário. Apesar de ter dado uma das maiores contribuições para a existência da teoria, as suas contribuições não ganharam relevância na época, “Como Argand não era um matemático de grande reputação, seus trabalhos acabaram por não ter reconhecimento e pouco tiveram efeito sobre os matemáticos da época”. (VIEIRA, 1999, p.43).

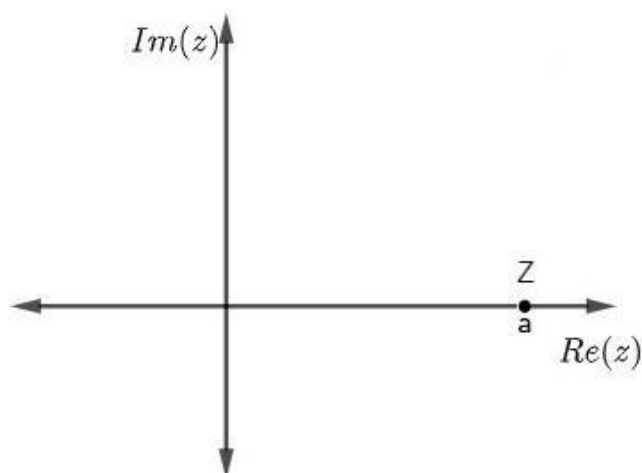
Com a publicação da demonstração do teorema fundamental da Álgebra em 1799, Gauss imortalizou os complexos. Considerado um dos principais teoremas da matemática, ele afirma que todo polinômio  $p(x)$  com o grau  $\geq 1$ , tem ao menos uma raiz no campo dos complexos. Após essa publicação e por ser muito respeitado na época, outros matemáticos começaram a operar com os complexos. O medo de não conseguirem representar geometricamente as quantidades imaginárias fez com que muitos não compreendessem essas quantidades, mas com Gauss considerando os complexos essa teoria se firmou na matemática. CAON (2013, p.8).

Somente no final do século XVIII, quando o renomado matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) passou a considerar os números complexos e sua representação no plano imaginário, que esses números ganharam status, e os matemáticos passaram a se sentir mais à vontade ao trabalhar com eles.

### 3. O módulo de um complexo

Todo número complexo é da forma  $z = a + bi$ , onde  $a e b \in \mathbb{R}$  e  $i = \sqrt{-1}$ , a idéia de Argand foi representar um número complexo como um vetor no plano, cujo qual é conhecido hoje como plano de Argand-Gauss, bem parecido com o plano cartesiano, porém, no lugar do eixo das abscissas tem-se o eixo real e no eixo das ordenadas, o imaginário.

Figura 1: Plano de Argand- Gauss



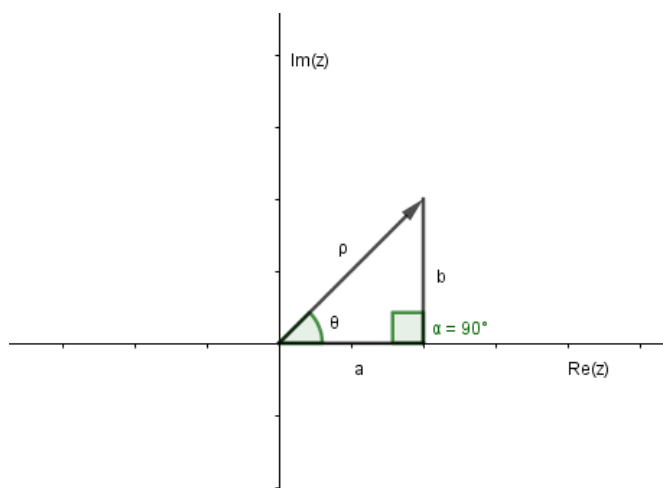
Fonte: Google

O módulo de um número complexo pode ser definido como sendo a sua distância até a origem do plano, e fica bem notável olhando geometricamente que o módulo de um complexo é definido por  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

### 4. Forma polar de um número complexo

Representando no plano o número complexo  $z = a + bi$  novamente, só que agora marcando o ângulo que esse número está formando com eixo real.

Figura 2: Representação geométrica de  $z$



Fonte: Próprio Autor

O ângulo que o número complexo está formando com o eixo real é o ângulo  $\theta$  que é conhecido como o menor argumento de  $z$  e que é representado da seguinte maneira:  $\arg(z)=\theta$ . Perceba que tem-se também um triângulo retângulo, ou seja, pode-se aplicar as propriedades trigonométricas de um triângulo que possui um ângulo de  $90^\circ$ , utilizando o ângulo  $\alpha$  como referência.

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\rho}$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{b}{\rho}$$

isolando  $a$  e  $b$  em ambas as igualdades,

$$a = \rho \cdot \cos(\theta)$$

$$b = \rho \cdot \text{sen}(\theta)$$

Como  $z = a + bi$ , substituindo os valores de  $a$  e  $b$ , fica com.

$$z = \rho \cdot \cos(\theta) + i \rho \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$z = \rho(\cos(\theta) + i \text{sen}(\theta))$$

Essa é a fórmula polar conhecida também como forma trigonométrica de um número complexo.

## 5. Primeira e segunda lei de Moivre

A primeira lei pode ser enunciada da seguinte maneira: um número complexo na sua forma polar elevado ao um expoente  $n$  qualquer, pode ser resolvido com o seu módulo elevado a  $n$  com e o seu argumento multiplicado por  $n$ .

$$z^n = \rho^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$$

Para demonstrar tal teorema utilizaremos a ideia que lezzi apresentou (2013 p.13). Ele utilizou o princípio da indução finita. (IEZZI; MURAKAMI, 2013, p.58)

Para provarmos que a relação é válida para todo  $n \in \mathbb{N}^*$  empregamos o princípio da indução finita (P.I.F.) cujo enunciado é o seguinte: Uma proposição  $P(n)$ , aplicável aos números naturais  $n$ , é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq n_0$  quando:

1º)  $P(n_0)$  é verdadeira, isto é, a propriedade é válida para  $n = n_0$ , e

2º) Se  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 0$  e  $P(k)$  é verdadeira, então  $P(k + 1)$  também é verdadeira.

$$n = 0 \text{ temos que } \begin{cases} z^0 = 1 \\ \rho^0 = \cos(0) + i \operatorname{sen}(0) = 1 \end{cases}$$

Admitiremos que a propriedade é válida para  $n = k - 1$  onde  $k \in \mathbb{N}^*$

$$z^{k-1} = \rho^{k-1} [\cos((k-1)\theta) + i \operatorname{sen}((k-1)\theta)]$$

Agora provaremos para  $n = k$

$$z^k = z^{k-1} \cdot z = \rho^{k-1} [\cos(k-1)\theta + i \operatorname{sen}(k-1)\theta] \cdot \rho [\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)]$$

Para facilitar a manipulação faremos que  $(k-1)\theta = x$

$$z^k = \rho^{k-1} \cdot \rho [\cos(x) + i \operatorname{sen}(x)] [\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)]$$

$$z^k = \rho^k [\cos(x)\cos(\theta) + \cos(x)\operatorname{sen}(\theta) + i \operatorname{sen}(x)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(\theta)]$$

$$z^k = \rho^k [\cos(x)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(\theta) + i [\cos(x)\operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta)\operatorname{sen}(x)]]$$

$$z^k = \rho^k [\cos(x+\theta) + i \operatorname{sen}(x+\theta)]$$

Colocando o valor de  $(k-1)\theta = x$ , fica-se com;

$$z^k = \rho^k [\cos((k-1)\theta + \theta) + i \operatorname{sen}((k-1)\theta + \theta)], \text{ portanto}$$

$$z^k = \rho^k [\cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta)]$$

Provou-se essa igualdade para os naturais, que para ser estendida aos inteiros, basta levar em consideração  $n = -m$ , onde é possível averiguar que ela é válida para todo o conjunto dos inteiros  $\mathbb{Z}$

Olhando geometricamente, ver-se-á como se comporta essa propriedade no plano, considerando o número complexo  $m = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ , utilizar-se-á a primeira lei de Moivre e o valor de  $m^2$  será calculado.

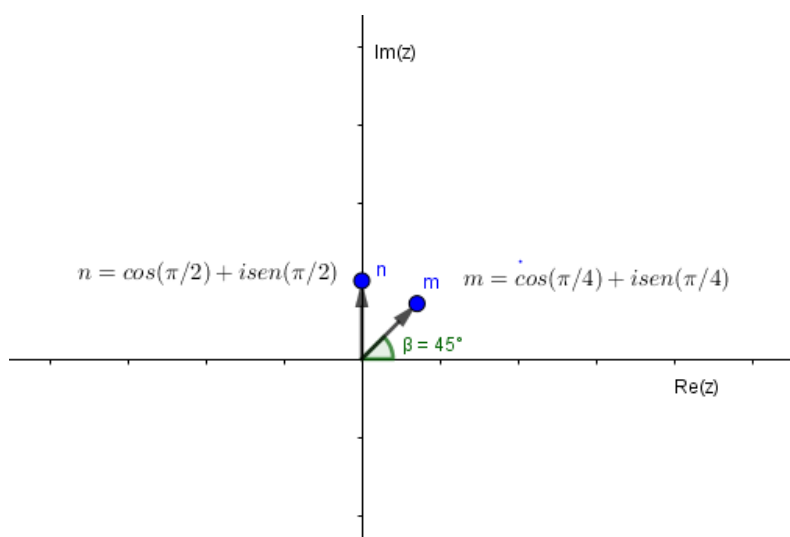
$$|m| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$|m| = \sqrt{1} = 1$$

$$m^2 = 1^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 2 + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 2\right)$$

$$m^2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Figura 3: Representação geométrica da potência de  $m$



Fonte: Próprio Autor

No gráfico o ponto  $n$  está representando o  $m^2$ , perceba que o módulo de  $m^2$  continua sendo um, já o argumento dobra, passa de  $45^\circ$  para  $90^\circ$ , o que era de se esperar já que o ângulo foi multiplicado por  $n$ , ou seja, por dois.

A segunda Lei de Moivre é particularmente a radiciação de um complexo, ou seja, como é possível extrair a enésima raiz de um número complexo, o teorema pode ser enunciado da seguinte maneira:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right)$$

Tal teorema será demonstrado utilizando a mesma ideia que (MOLTER 2020), utilizou:

Considerando um complexo  $w = a(\cos(t) + i \operatorname{sen}(t))$  e  $z = w^n$ , temos pelo primeiro teorema que existe um  $z$  que satisfaz.

$$z = \rho [\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)]$$

$$\rho[\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)] = [a(\cos(t) + i\text{sen}(t))]^n$$

$$\rho [\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)] = a^n [\cos(nt) + i\text{sen}(nt)]$$

Pela igualdade de complexos, temos que

$$a^n = \rho, \text{ logo } a = \sqrt[n]{\rho}$$

$$\theta + 2k\pi = nt$$

$$t = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right)$$

Os valores de  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n - 1$

Molter explica o motivo de seno e cosseno ser periódico e os valores começarem a se repetir, por isso considera-se até  $n - 1$

A priori vale para todo  $k$  inteiro, porém o seno e o cosseno desses argumentos assumem para  $n$  valores distintos, então é suficiente determinar para  $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n-1$ . De fato, veremos que quando  $k=n$ , vamos obter o mesmo valor para seno e cosseno de  $k=0$ . (MOLTER, 2020, p.260).

## 6. Aplicações geométricas

Agora, verificar-se-á, como os complexos possuem ligação com a geometria e como a solução de equações se comportam quando colocadas no plano. Com a segunda lei de Moivre, pode-se extrair a  $n$ ésima raiz de qualquer número. Um número complexo quando extraído um  $n$ ésima raiz dele, este apresentará  $n$  valores, lezzi (2013, p.40).

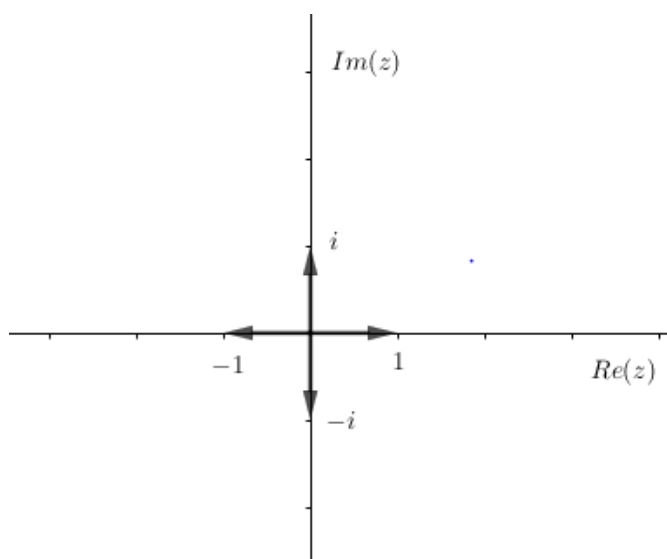
Todo número complexo  $z$  não nulo admite  $n$  raízes  $n$ ésimas distintas, as quais têm todas o mesmo módulo  $\sqrt[n]{|z|}$  e argumentos principais formando uma progressão aritmética de primeiro termo  $\frac{\theta}{n}$  e razão  $\frac{2\pi}{n}$ .

As  $n$ ésimas raízes desse número quando colocadas no plano complexo, formarão um polígono regular inscrito ne uma circunferência, cuja qual estará situada na origem e terá raio igual  $\sqrt[n]{|z|}$ . Exemplos:

$z^4 = 1$ , logo  $z = \sqrt[4]{1}$  como já enunciado acima, tem-se 4 possíveis valores para  $z$

- O módulo de  $z$  é  $\rho = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$
- O argumento principal de  $z$  é  $\theta$ , que tem  $\cos(\theta) = 1$  e  $\text{sen}(\theta) = 0$  logo  $\theta = 0^\circ$
- Como  $n = 4$  temos que o nosso valor de  $k$  vai variar até  $k = 4 - 1 = 3$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ ,
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right)$  colocando os valores na fórmula fica:
- $z_0 = \cos(0) + i \text{sen}(0) = 1$
- $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$
- $z_3 = \cos(\pi) + i \text{sen}(\pi) = -1$
- $z_4 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$

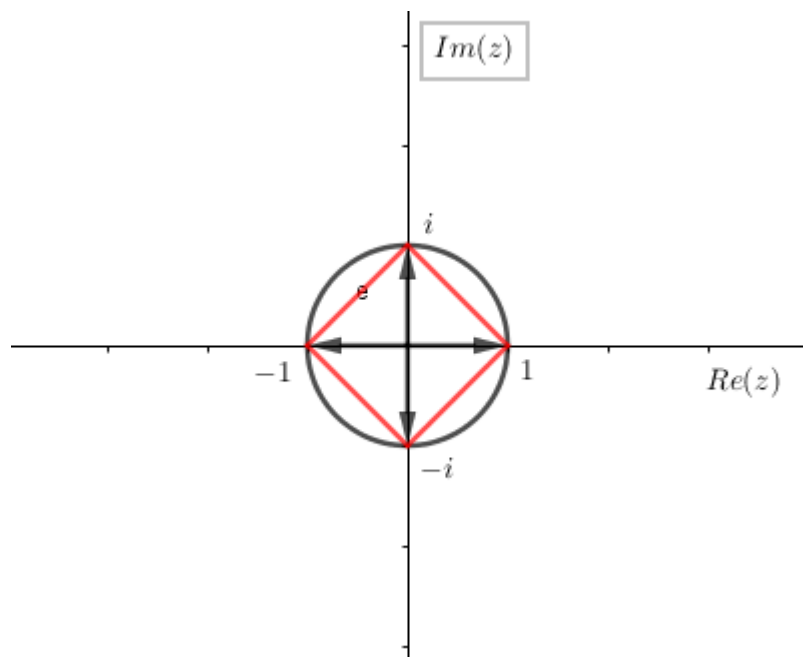
Figura 4: Representação das raízes quarta de 1



Fonte: Próprio Autor

Conectando esses afixos obtém-se um quadrado inscrito em uma circunferência de raio 1.

Figura 5: Polígono que as raízes quartas de 1 forma



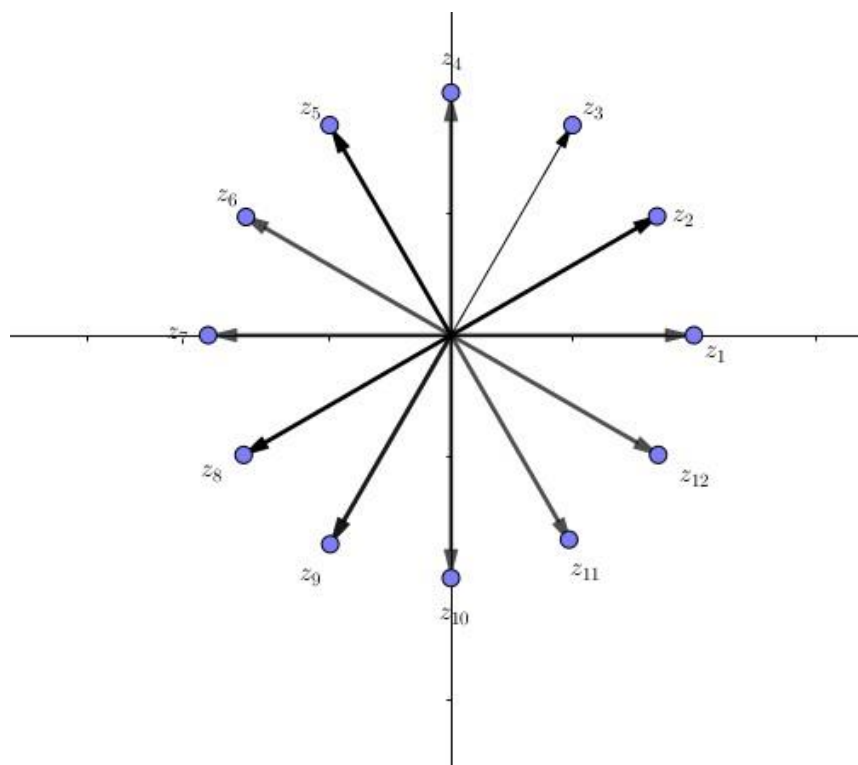
Fonte: Próprio Autor

Para se obter um dodecágono regular inscrito em uma circunferência de raio 1, pode-se utilizar as raízes da equação  $z^{12} - 1 = 0$ , resolvendo e marcando essas raízes no plano complexo, formar-se-á um dodecágono regular.

- O módulo de  $z$  é  $\rho = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$
- O argumento principal de  $\cos \theta = 1$  e  $\text{sen } \theta = 0$  portanto  $\theta = 0^\circ$
- Como  $n = 12$ , temos que os valores  $k$  vai variar até,  $k = 12 - 1 = 11$ ,  
 $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \text{sen} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right)$  colocando os valores na fórmula, tem-se:
  - $z_0 = \text{Cos}(0) + i \text{sen}(0) = 1$
  - $z_1 = \text{Cos} \left( \frac{\pi}{6} \right) + i \text{sen} \left( \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$
  - $z_2 = \text{Cos} \left( \frac{\pi}{3} \right) + i \text{sen} \left( \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$
  - $z_3 = \text{Cos} \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) = i$
  - $z_4 = \text{Cos} \left( \frac{2\pi}{3} \right) + i \text{sen} \left( \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

- $z_5 = \text{Cos} \left( \frac{5\pi}{6} \right) + i \text{sen} \left( \frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$
- $z_6 = \text{Cos} (\pi) + i \text{sen}(\pi) = -1$
- $z_7 = \text{Cos} \left( \frac{7\pi}{6} \right) + i \text{sen} \left( \frac{7\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$
- $z_8 = \text{Cos} \left( \frac{4\pi}{3} \right) + i \text{sen} \left( \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$
- $z_9 = \text{Cos} \left( \frac{3\pi}{2} \right) + i \text{sen} \left( \frac{3\pi}{2} \right) = -i$
- $z_{10} = \text{Cos} \left( \frac{5\pi}{3} \right) + i \text{sen} \left( \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$
- $z_{11} = \text{Cos} \left( \frac{11\pi}{6} \right) + i \text{sen} \left( \frac{11\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

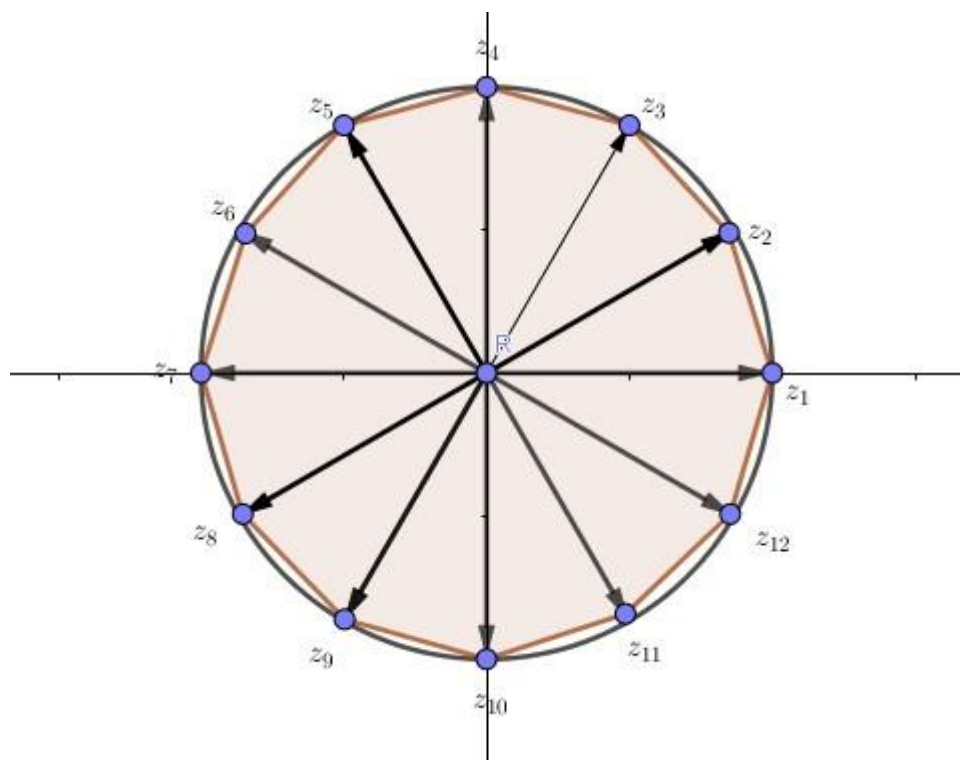
Figura 6: Representação das raízes da equação  $z^{12}-1=0$



Fonte: Próprio Autor

Fazendo a ligação dessas raízes obtém-se um dodecágono regular inscrito em uma circunferência de raio 1.

Figura 7: Polígono que as raízes da equação  $z^{12}-1=0$  forma quando colocadas no plano



Fonte: Próprio Autor

Essas propriedades que foram apresentadas serão utilizadas para resolver algumas questões, mostrando como esse conteúdo de complexos pode ser cobrado de forma interdisciplinar dentro da matemática.

## 7. Questões: Complexos e geometria

1- (ITA-2019) Sabe-se que  $-2 + 2i$  é uma das raízes quartas de um número complexo  $z$ . Então, no plano de Argand-Gauss, a área do triângulo, cujos vértices são as raízes cúbicas de  $z$ , é igual a?

Como  $-2 + 2i$  é uma das raízes quartas de  $z$ , basta elevar essa raiz à quarta potência para descobrir o valor de  $z$

$$z = (-2 + 2i)^4$$

$$z = (-2)^4 \cdot (1 - i)^4$$

$$z = 16 \cdot (1 - i)^4$$

Utilizando a primeira lei de Moivre para resolver a potência tem-se:

$$(1 - i)^4 = (\sqrt{2})^4 \left( \cos\left(4 \cdot \frac{7\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(4 \cdot \frac{7\pi}{4}\right) \right)$$

$$(1 - i)^4 = 4(\cos(7\pi) + i \operatorname{sen}(7\pi))$$

$$(1 - i)^4 = -4$$

$$z = 16 \cdot (-4)$$

$$z = -64$$

Com a segunda lei de Moivre, serão encontradas as raízes cúbicas de  $z$  para se encontrar os vértices do triângulo

$$|z| = 64$$

E o argumento principal será  $\theta = \pi$

O valor  $k$  vai variar até  $n - 1$ , ou seja,  $3 - 1 = 2$

Inserindo essas informações na fórmula fica:

$$z_k = \sqrt[3]{64} \left( \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) \right)$$

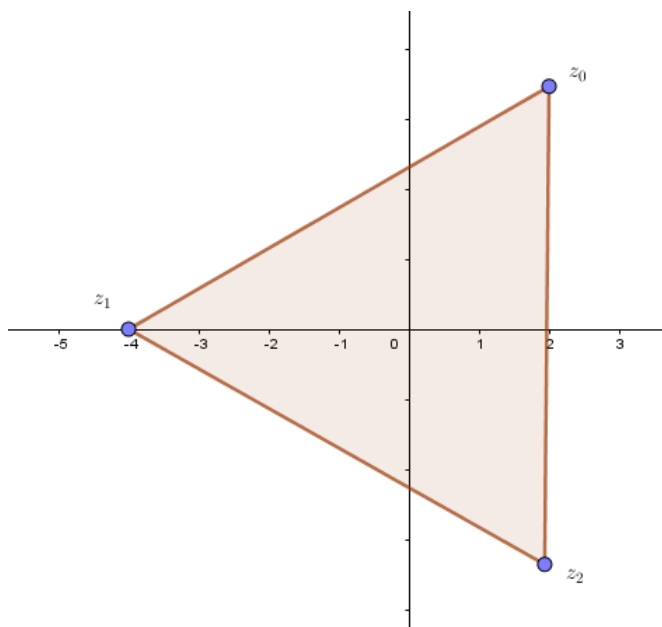
$$z_0 = \sqrt[3]{64} \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 4 \cdot \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$z_1 = \sqrt[3]{64} (\cos(\pi) + i \operatorname{sen}(\pi)) = 4 \cdot (-1 + 0) = -4$$

$$z_2 = \sqrt[3]{64} \left( \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right) = 4 \cdot \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 - 2\sqrt{3}i$$

Logos os vértices do triângulo serão  $(2 + 2\sqrt{3}i, -4, 2 - 2\sqrt{3}i)$ , marcando esses números complexos no plano, ter-se-á um triângulo regular, ou seja, equilátero.

Figura 8: Triângulo formado pelas raízes cúbicas de -64



Fonte: Próprio Autor

Como a altura desse triângulo é 6 e ele é equilátero seu lado pode ser encontrado da seguinte maneira:

$$\frac{l\sqrt{3}}{2} = 6$$

$$l = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

$$l = 4\sqrt{3}$$

Como o lado vale  $4\sqrt{3}$ , a área será:

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A = \frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A = \frac{48\sqrt{3}}{4}$$

**$A = 12\sqrt{3}$  u.a, a área do triângulo.**

2- (ITA- 1998) Considere no plano complexo, um polígono regular cujos vértices são as soluções da equação  $z^6 = 1$ . A área deste polígono, em unidades de área, é igual a?

Sabe-se que esse polígono é um hexágono, marcando as raízes no plano complexo fica trivial encontrar a área do polígono.

$$z = \sqrt[6]{z}$$

$$|z| = 1$$

O argumento principal de  $z$  será  $\theta = 0^\circ$

O valor de  $k$  irá variar até  $k-1$ , ou seja,  $k = 0,1,2,3,4,5$

Colocando na segunda lei de Moivre tem-se:

$$z_0 = \cos(0) + i \operatorname{sen}(0) = 1$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

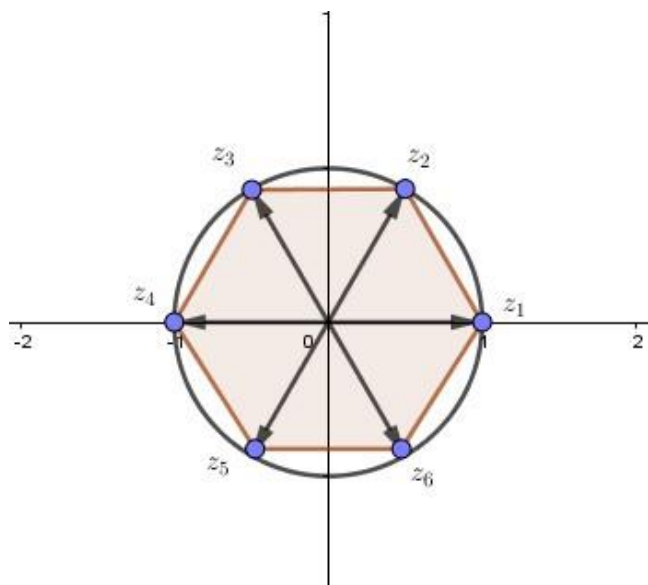
$$z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = \cos(\pi) + i \operatorname{sen}(\pi) = -1$$

$$z_4 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_5 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Figura 9: Representação das raízes sexta de 1



Fonte: Próprio autor

Perceba que o hexágono, está inscrito em uma circunferência de raio 1, e o como um dos lados dos triângulos é o raio, cujo qual é equilátero, a área do hexágono será:

$$A = \frac{6 \cdot 1^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ u. a}$$

A representação do conjunto dos complexos em um plano, permitiu muitas aplicações desse conjunto em áreas distintas dentro da matemática, tais como em solução de equações diferenciais de segunda ordem, geometria, trigonometria e hoje é usado até na física.

## 8. Considerações finais

Os números complexos surgiram para resolver problemas dentro da própria matemática, foram mais de 200 anos para a ideia ser aceita e matemáticos começarem a operar sem medo de estarem usando uma ideia absurda. Durante esse tempo, muitos foram os estudiosos que fizeram as suas contribuições para o

entendimento desse corpo. Essa pesquisa apresentou a história do surgimento dos complexos e os problemas que incentivaram estudiosos a admitirem que os números reais se faziam insuficientes para as soluções de equações.

Com a representação das ditas quantidades imaginárias em um plano, o entendimento do comportamento dos complexos foi elevado e a pesquisa em questão explorou a aplicação desse conjunto na geometria, mostrando como se comporta as enésimas raízes de um número quando extraídas e colocadas no plano de Argand- Gauss.

Os números complexos possuem uma vasta interdisciplinaridade dentro da matemática e uma história no seu desenvolvimento como teoria muito interessante e que pode ser amplamente explorada quando tal conteúdo for ensinado. Mostrar as aplicações desse conjunto enriquece o ensino e norteia a sua importância, já que esse conjunto fornece muitas ferramentas para a compreensão de “n” problemas matemáticos.

Essa pesquisa mostrou que uma teoria ou um problema pode ficar em aberto durante muito tempo e que a matemática não é uma ciência pronta e acabada, mas, que está em constante evolução. Os conhecimentos ditos inúteis hoje podem ser apenas uma não compreensão completa da ideia ainda. O objetivo principal do trabalho foi mostrar historicamente o surgimento dos complexos e a interdisciplinaridade que esse conteúdo possui com a geometria.

## 9. Referencias

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa qualitativa em Educação Matemática: notas introdutórias. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 5ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

CAON, Fernanda. **NÚMEROS COMPLEXOS: INTER-RELAÇÃO ENTRE CONTEUDOS E APLICAÇÕES**. Dissertação (Mestrado em matemática) - Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa. 2013.

COSTA, Antônio Geraldo Lacerda da. **Números complexos: um pouco de história ensino e aplicações**. Dissertação de mestrado. João Pessoa 2013.

DENZIN, N. K; LINCOLN, I.O **planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios, equações** / Gelson Iezzi. — 8. ed. — São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson. MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções** . — 9. ed. — São Paulo : Atual, 2013.

JUNIOR, Ulício Pinto. **A História dos números complexos: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand** . Rio de Janeiro: UFRJ / Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática, 2009.

MOLTER, Alexandre. **Trigonometria e números complexos: com aplicações**. Editora Blucher, 2020. Disponível em <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9786555060119/>. Acesso em: 24 out. 2021.

SOUSA Jr., Luis Amancio Machado de. **Introdução as funções de variáveis complexas I: volume único/ Luis Amancio Machado de Sousa Jr,; Luiz Pedro San Gil Jutuca-** Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2015.

VIEIRA, Lucia Helena da Silva. **Epistemologia dos números complexos. Monografia de conclusão de Curso**. Florianópolis .1999.