

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE RONDÔNIA

Cacoal - Código INEP: 11109815

Rodovia BR 364, Lote 2A, CEP 76960-970, Cacoal (RO)

CNPJ:10.817.343/0008-73 -Telefone:(69) 2182-9641

## ATA DE DEFESA DE ARTIGO CIENTÍFICO

Na data 26/11/2020 realizou-se a sessão pública de defesa do Artigo Científico intitulada **Estudo do Pêndulo Simples e Pêndulo Físico: Uma abordagem a partir do Movimento Harmônico Simples** apresentada pela aluna **Debora Priscila Costa Ferreira (2017106043037-5)** do Curso **Licenciatura em Matemática (Cacoal)**. Os trabalhos foram iniciados às **09:00** pelo Professor **Juliano Alves de Deus** presidente da banca examinadora, constituída pelos seguintes membros:

- **Juliano Alves de Deus** (Orientador)

A banca examinadora, tendo terminado a apresentação do conteúdo do Artigo Científico, passou à arguição da candidata. Em seguida, os examinadores reuniram-se para avaliação e deram o parecer final sobre o trabalho apresentado pelo aluno, tendo sido atribuído o seguinte resultado:

**[X] APROVADO**

**Nota: 98**

Proclamados os resultados pelo presidente da banca examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, eu **Juliano Alves de Deus** lavrei a presente ata que assino juntamente com os demais membros da banca examinadora.

CACOAL / RO, 26/11/2020

## **ESTUDO DO PÊNDULO SIMPLES E PÊNDULO FÍSICO: UMA ABORDAGEM A PARTIR DO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES**

**Débora Priscila Costa Ferreira**

IFRO - Instituto Federal de Ciência, Educação e Tecnologia de Rondônia, campus Cacoal  
debora.yrs@gmail.com

**Juliano Alves de Deus**

IFRO - Instituto Federal de Ciência, Educação e Tecnologia de Rondônia, campus Cacoal  
juliano.alves@ifro.edu.br

**Agmar Aparecido Félix Chaves**

IFRO - Instituto Federal de Ciência, Educação e Tecnologia de Rondônia, campus Cacoal  
agmar.chaves@ifro.edu.br

### **Resumo**

O mundo está repleto de oscilações, muitas delas curiosas ou desagradáveis, outras economicamente importantes e até mesmo perigosas, o que justifica seu estudo e controle em diversas áreas, como na física e engenharia. Este artigo tem como objetivo, a partir de uma análise bibliográfica à luz do movimento harmônico simples, propor ao professor que atua no Ensino Médio uma abordagem teórica e experimental de alguns osciladores nos quais as forças de movimento estão relacionadas à gravidade: pêndulo simples e físico. Conclui-se que o aporte teórico, junto ao experimento desenvolvido, ainda que simplista, contribuem para análise do comportamento desses osciladores e a interpretação de suas propriedades, principalmente quanto à irrelevância da massa e dependência do comprimento para o período verificado no pêndulo simples, e a influência da inércia sobre a oscilação dos pêndulos físicos, além da relação gravitacional em ambos os materiais de estudo.

**Palavras-chave:** Movimento harmônico simples; Pêndulo simples; Pêndulo físico.

### **Abstract**

The world is full of oscillations, many of them curious or unpleasant, others economically important and even dangerous, which justifies its study and control in several areas, as in physics and engineering. This article aims, from a bibliographic analysis in the light of the simple harmonic movement, to propose to the teacher who works in high school a theoretical and experimental approach of some oscillators in which the forces of movement are related to gravity: simple and physical pendulum. It is concluded that the theoretical contribution, together with the developed experiment, although simplistic, contribute to the analysis of the behavior of these oscillators and the interpretation of their properties, mainly as to the irrelevance of the mass and dependence of the length for the period verified in the simple pendulum, and the influence of the inertia on the oscillation of the physical pendulums, besides the gravitational relation in both materials of study.

**Keywords:** Simple harmonic movement; Simple pendulum; Physical pendulum.

## 1. Introdução

O badalar do relógio na parede, pistões de motor a explosão, fio metálico com corrente elétrica alternada, movimento dos elétrons, as cordas juntamente com as colunas de ar e vibração dos instrumentos musicais são exemplos do movimento oscilatório harmônico simples, ou seja, todos eles vibram, de um lado para o outro, e se repetem em intervalos de tempos.

O mundo está repleto de oscilações, muitas delas simplesmente curiosas ou desagradáveis, outras economicamente importantes e até mesmo perigosas, como as que são provocadas por ventos vigorosos e podem romper linhas de transmissão de energia elétrica, e as que são provocadas por terremotos, com capacidade de derrubar casas e edifícios (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2018). Daí a relevância do estudo e controle das oscilações em diversas áreas, como na física e engenharia.

Este artigo tem como objetivo propor ao professor que atua no Ensino Médio uma abordagem teórica e experimental de alguns osciladores nos quais as forças de movimento estão relacionadas à gravidade: pêndulo simples e físico. Para tanto, será realizado um aporte teórico fundamentado em uma pesquisa bibliográfica à luz do movimento harmônico simples, assim como uma metodologia experimental que se traduz em uma proposta de aplicação, a qual será detalhada em tópico específico.

Para esta abordagem, é preciso considerar, inicialmente, que um pêndulo desviado da posição de equilíbrio e depois solto fornece um exemplo de oscilação livre em que o sistema, após retornar a sua forma original, não é submetido a forças externas oscilatórias e estabelece seu próprio período de oscilação, determinado por seus parâmetros. Caso submetido a impulsos externos periódicos tem-se a oscilação forçada, em que é preciso considerar também o período das forças externas e sua relação com o período próprios das oscilações livres do sistema (NUSSENZVEIG, 2014).

Os sistemas oscilantes mais simples a serem estudados apresentam apenas um grau de liberdade, ou seja, são representados por apenas uma coordenada, como a coordenada horizontal de um sistema massa-mola ou o ângulo de desvio de

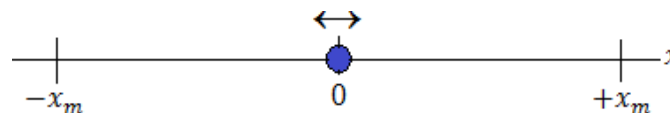
um pêndulo em relação à posição vertical de equilíbrio. Segundo Nussenzweig (2014), para pequenos desvios, qualquer sistema com um grau de liberdade deve obedecer, com boa aproximação, a equação do movimento dada por  $\ddot{x} = -\omega^2 x$ , onde  $\omega$  é chamada *frequência angular* do movimento.

Para o autor, essa restrição a pequenos desvios é importante, pois, para desvios maiores, tendem a aparecer correções não lineares (termos adicionais proporcionais a  $x^2$ ,  $x^3$ ,...) na lei de forças. Dessa forma, um sistema de massa e mola oscilatório, por exemplo, ao passar do seu limite elástico, não retorna à posição de equilíbrio, o que daria origem a efeitos mais complexos.

## 2. Movimento Harmônico Simples

Dada uma partícula que oscila nas vizinhanças de um determinado eixo  $x$ , movendo-se da esquerda para a direita, de uma mesma distância  $x_m$  em relação à  $x$ , como mostra a figura abaixo:

Figura 01 – Oscilação de uma partícula



Fonte: o autor.

Assim, “a frequência da oscilação é número de vezes por unidade de tempo que a partícula descreve uma oscilação completa (um ciclo)” (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2018, p. 88). A unidade de frequência do SI é o hertz, sendo definido como:

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ oscilação por segundo} = 1 \text{ s}^{-1}$$

O tempo que leva para essa partícula executar um ciclo completo de movimento oscilatório, de um extremo ao outro, e de volta ao anterior, é chamado de período  $T$  (TIPLER; MOSCA, 2016), e é dado por:

$$T = \frac{1}{f} \quad (1)$$

Conforme Halliday, Resnick e Walker (2018), todo movimento que se repete em intervalos regulares é denominado movimento periódico ou harmônico, sendo o movimento harmônico simples (MHS) um tipo particular, representado pela função senoidal do tempo  $t$ , ou seja, pode ser escrito como um seno ou cosseno do tempo  $t$ . Dessa forma, apresenta-se, arbitrariamente, a função cosseno para descrever o deslocamento ou posição  $x$ , no instante  $t$ , da partícula ilustrada:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \theta) \quad (2)$$

em que  $x_m$  determina o valor máximo da oscilação e é chamado de amplitude, e o argumento da função cosseno,  $\omega t + \theta$ , é a fase do movimento, onde  $\omega$  representa a frequência angular do movimento e  $\theta$  o ângulo ou constante de fase.

Para determinar a relação entre frequência angular  $\omega$  e a frequência  $f$  e o período  $T$ , basta observar que, de acordo com a definição de período, a posição  $x(t)$  da partícula deve ser a mesma que a posição inicial depois de ocorrido exatamente um período. Assim, se  $x(t)$  é a posição da partícula em um dado instante  $t$ , a partícula deve estar na mesma posição no instante  $t + T$  (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2018, p. 90).

O autor utiliza a equação (2) para expressar essa condição, considerando  $\theta = 0$  para evitar complicações dispensáveis, demonstrando a volta à posição inicial por meio da igualdade:

$$x_m \cos \omega t = x_m \cos \omega(t + T) \quad (3)$$

“A função cosseno volta a ter o mesmo valor pela primeira vez quando o argumento (ou seja, a fase) aumenta de  $2\pi$ ” (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2018, p. 90). De acordo com a equação (3):

$$\begin{aligned} \omega(t + T) &= \omega t + 2\pi \\ \omega T &= 2\pi \\ \omega &= \frac{2\pi}{T}, \text{ como } T = \frac{1}{f} \\ \omega &= 2\pi f \end{aligned} \quad (4)$$

com a unidade de frequência angular do SI descrita em radiano por segundo (rad/s).

## 2.1 Velocidade e aceleração do MHS

A velocidade varia em módulo e sentido quando a partícula descreve um MHS e, em particular, é momentaneamente 0 nos pontos extremos e máxima no ponto central do movimento (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2018). Para determinar a função  $v(t)$  que representa a velocidade em qualquer instante de tempo, calcula-se a derivada da função  $x(t)$  que descreve a posição em função do tempo:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_m \cos(\omega t + \theta) \\v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [x_m \cos(\omega t + \theta)] \\v(t) &= -\omega x_m \sin(\omega t + \theta)\end{aligned}\tag{5}$$

Define-se  $\omega x_m$  como a amplitude  $v_m$  da variação da velocidade. Quando a partícula passa pelo ponto  $x = 0$  e está se movendo da esquerda para a direita, a velocidade é positiva e o seu módulo apresenta maior valor possível. Quando a partícula passa pelo ponto  $x = 0$ , se movendo da direita para a esquerda, a velocidade é negativa e seu módulo tem, novamente, o maior valor possível (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2018).

Derivando a velocidade em relação ao tempo, é possível obter a aceleração:

$$\begin{aligned}a(t) &= \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [-\omega x_m \sin(\omega t + \theta)] \\a(t) &= -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \theta)\end{aligned}\tag{6}$$

Nesse caso,  $\omega^2 x_m$  é a amplitude  $a_m$  da variação da aceleração. Substituindo  $x_m \cos(\omega t + \theta)$  por  $x(t)$ , obtém-se a seguinte relação:

$$a(t) = -\omega^2 x\tag{7}$$

Esta equação mostra que a aceleração  $a$  é proporcional ao deslocamento  $x$ , tem sentido contrário (daí o sinal negativo) e as duas grandezas estão relacionadas pelo quadrado da frequência angular  $\omega$  (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2018).

## 2.2 A lei da força para o MHS

Conhecida a aceleração do MHS, pode-se utilizar a segunda lei de Newton para determinar a força que atua sobre a partícula para que ela adquira aceleração:

$$F = ma = m(-\omega^2 x) = -(m\omega^2)x \quad (8)$$

O sinal negativo indica que a força deve ter sentido oposto ao do deslocamento da partícula, possibilitando interpretar que, no MHS, a força é restauradora, no sentido de se opor ao deslocamento, tentando levar a partícula à posição central  $x = 0$  (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2018).

De acordo com Tipler e Mosca (2016), para descrever a força que age sobre um sistema massa-mola, exemplo de oscilador harmônico simples, utiliza-se a lei de Hooke, tal que  $F = -kx$ , onde  $k$  é a constante elástica da mola, uma medida de sua rigidez. Relacionando  $k$  à massa do bloco e à frequência do MHS resultante, deduz-se outra forma da equação característica do MHS:

$$\begin{aligned} F &= -(m\omega^2)x \\ -kx &= -(m\omega^2)x \\ k &= m\omega^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Portanto, “o movimento harmônico simples é o movimento executado por uma partícula sujeita a uma força de módulo proporcional ao deslocamento da partícula e orientada no sentido oposto” (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2018, p. 93). Caso a massa  $m$  do objeto seja conhecida, é possível calcular a frequência angular do movimento evidenciando  $\omega$  na equação (9):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (10)$$

Como  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , o período do movimento também passa a assumir outra configuração:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (11)$$

Da mesma forma que, sendo  $T = \frac{1}{f}$ , a frequência passa a ser representada pela equação:

$$\frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (12)$$

Logo, a frequência aumenta com o aumento de  $k$  e diminui com o aumento da massa. Como  $f$  depende apenas de  $k$  e de  $m$ , tem-se a definição de outra significativa propriedade do MHS: “a frequência (e, portanto, também o período) do movimento harmônico simples é independente da amplitude” (TIPLER; MOSCA, 2016, p. 469).

### 2.3 Energia no MHS

Quando um corpo executa um movimento harmônico simples, a energia potencial ( $U$ ) e energia cinética ( $K$ ) existentes variam com o tempo. Sua soma, que corresponde à energia mecânica total  $E = U + K$ , é constante (TIPLER; MOSCA, 2016).

O autor cita, como exemplo, um corpo distante  $x$  do equilíbrio, sob a ação de uma força restauradora  $-kx$ . A energia potencial do sistema é:

$$U = \frac{1}{2} kx^2 \quad (13)$$

Para o MHS,  $x = x_m \cos(\omega t + \theta)$ . Substituindo na equação (13), a energia potencial passa se apresentar da seguinte forma:

$$U = \frac{1}{2} kx_m^2 \cos^2(\omega t + \theta) \quad (14)$$

A energia cinética do sistema, por sua vez, é:

$$K = \frac{1}{2} mv^2 \quad (15)$$

onde  $m$  é a massa do corpo e  $v$  sua velocidade. Como no MHS  $v_x = -\omega x_m \text{sen}(\omega t + \theta)$ , a energia cinética passa a ser dada por:

$$K = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \text{sen}^2(\omega t + \theta)$$

Como  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ :

$$K = \frac{1}{2} k x_m^2 \text{sen}^2(\omega t + \theta) \quad (16)$$

Logo, a energia mecânica total  $E$  é a soma das energias potencial e cinética:

$$E = U + K$$

$$E = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega t + \theta) + \frac{1}{2} k x_m^2 \text{sen}^2(\omega t + \theta)$$

$$E = \frac{1}{2} k x_m^2 [\cos^2(\omega t + \theta) + \text{sen}^2(\omega t + \theta)] \quad (17)$$

Sabendo que, para qualquer ângulo  $\alpha$ ,  $\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$ . Assim, a grandeza entre colchetes é igual a 1, o que implica na equação:

$$E = \frac{1}{2} k x_m^2 \quad (18)$$

Isso mostra que a energia mecânica é constante, independe do tempo e é proporcional ao quadrado da amplitude.

Quanto ao comportamento da energia no MHS, Tipler e Mosca (2016) citam que, para um corpo em seu deslocamento máximo, a energia total é inteiramente potencial. À medida que ele se move para sua posição de equilíbrio, a energia cinética do sistema aumenta enquanto a potencial diminui. Quando o corpo está passando pela sua posição de equilíbrio, sua energia cinética é máxima, a potencial é zero e a energia total é inteiramente cinética.

Após passar pelo ponto de equilíbrio, a energia cinética começa a diminuir enquanto a potencial aumenta, até que o corpo pare momentaneamente, novamente, em seu deslocamento máximo (agora, do outro lado). Em qualquer momento, a soma das energias potencial e cinética é constante.

### 3. Pêndulos

As primeiras considerações sobre o pêndulo foram realizadas por Galileu Galilei, cujo interesse foi despertado ao observar o movimento de um candelabro da Catedral de Pisa, quando ainda era estudante (HELDEN, 2007).

Os estudos de Galileu contribuíram para a formulação da propriedade conhecida como isocronismo do pêndulo, segundo a qual o seu período de oscilação é independente de sua amplitude, contribuindo para posteriores trabalhos acerca do movimento harmônico simples.

Galileu investigou as características de pêndulos e chegou à conclusão não só que eram isócronos, característica que, repete-se, só é válida em regime de pequenas oscilações, como também voltavam praticamente à altura a que tinham sido largados, o que hoje se admite como manifestação da conservação de energia, um conceito ainda não introduzido na época. Além disso, observou que pêndulos mais leves cessavam a sua oscilação mais rapidamente que os que possuíam pesos maiores e que o quadrado do período de oscilação é proporcional ao comprimento do pêndulo (LEITE, 2011, p. 01).

Atualmente, são conhecidos diversos tipos de pêndulos, dentre os quais estão os pêndulos simples, físico, cônico, de torção, de Foucault, espiral, duplo e invertido. Apesar de todos serem usados para calcular movimentos com precisão, alguns desses precisam de laboratórios de alta complexidade para seu estudo, ficando inviáveis aos laboratórios escolares, principalmente pelo alto custo.

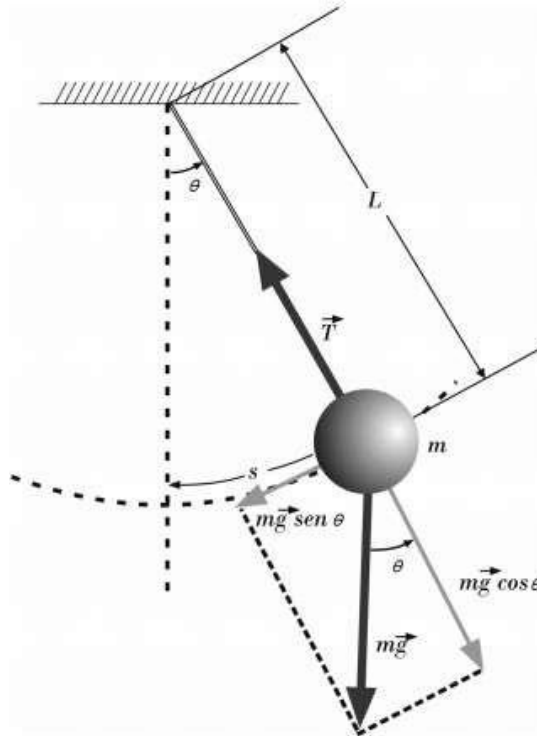
#### 3.1 Pêndulo Simples

O pêndulo simples é composto por uma partícula de massa  $m$  (denominada peso do pêndulo), suspensa por um fio inextensível, de massa desprezível e comprimento  $L$ , de tal forma que o peso está livre para oscilar, para a direita e para a esquerda de uma reta vertical que passa pelo ponto de suspensão do fio (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2018). As unidades de comprimento, massa e gravidade são definidas em  $m$ ,  $kg$  e  $m/s^2$ , respectivamente.

As forças que atuam sobre o corpo suspenso são seu peso  $m\vec{g}$  e a tensão do fio  $\vec{T}$ . Em relação ao ângulo  $\theta$  formado com a vertical, o peso apresenta componentes  $mg \cos \theta$ , ao longo do fio, e  $mg \sin \theta$ , tangente ao arco circular, apontando no sentido da redução de  $\theta$ . Assim, a componente tangencial produz um

torque restaurador em relação ao ponto de suspensão do pêndulo, pois age no sentido oposto ao deslocamento do peso, tendendo a levá-lo de volta ao ponto central ( $\theta = 0$ ), ou ponto de equilíbrio (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2018, p. 99).

**Figura 02 – Pêndulo simples**



Fonte: Tipler e Mosca, 2016.

Tipler e Mosca (2016) descrevem, com base nos componentes tangenciais, a segunda lei de Newton ( $\sum F_t = ma_t$ ) como:

$$- mg \operatorname{sen} \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (19)$$

onde o comprimento do arco  $s$  se relaciona com o ângulo  $\theta$  através de  $s = L\theta$ . Derivando duas vezes os dois lados de  $s = L\theta$ , temos:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = L \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Substituindo  $\frac{d^2 s}{dt^2}$ , na equação (19), por  $L \frac{d^2 \theta}{dt^2}$  e reorganizando, temos a equação do movimento do pêndulo simples:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta \quad (20)$$

Dessa forma, o movimento do pêndulo simples é descrito por uma função  $\theta(t)$  que satisfaz a equação diferencial  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$ , onde a incógnita é a função  $\theta(t)$ , com  $\theta$  sendo a variável dependente e  $t$  a variável independente.

Segundo Nussenzveig (2014), medindo o ângulo  $\theta$  em radianos, temos para ângulos  $\theta$  pequenos:

$$\theta \ll 1 \rightarrow \sin \theta \approx \theta \quad (21)$$

O autor aponta, como exemplo,  $\theta = 0,1745$  rad, para o qual temos  $\sin \theta = 0,1736$ , de modo que a (21) ainda é válida com erro relativo da ordem de 0,5%. Logo, para pequenos desvios da posição de equilíbrio estável, a equação (20) se reduz a equação de oscilação harmônica:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0, \quad \text{onde } \omega^2 = \frac{g}{l} \quad (22)$$

com  $\omega^2$  sendo a força restauradora por unidade de deslocamento e por unidade de massa.

Como o período de oscilação para o movimento harmônico simples é da forma geral  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , tem-se como período  $T$  para pequenas oscilações do pêndulo simples:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (23)$$

E a solução da equação (22) é dada por  $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \delta)$ , onde  $\theta_0$  é o deslocamento angular máximo.

Como se verifica, quanto maior for o comprimento do pêndulo, maior será o período. O período e também, portanto, a frequência, são independentes da amplitude da oscilação (desde que esta permaneça pequena), o que constitui o isocronismo do pêndulo, descoberto por Galileu.

De acordo com Tipler e Mosca (2016), a aceleração da gravidade pode ser medida usando-se um pêndulo simples sob pequenas oscilações. Para tanto, é necessário medir apenas o seu comprimento  $L$  e período  $T$  (usualmente dado pela

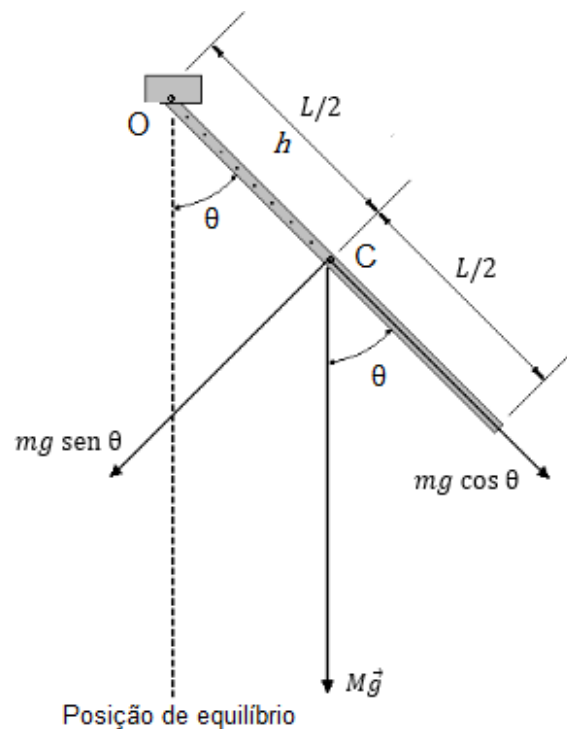
divisão do tempo de  $n$  oscilações por  $n$ , para minimizar erros de medida), e utilizar a equação (23) para calcular o valor de  $g$ .

### 3.2 Pêndulo Físico

O pêndulo físico corresponde a “qualquer corpo rígido, suspenso de um ponto  $O$  de tal forma que possa girar livremente (sem atrito) em torno de um eixo horizontal, passando pelo ponto de suspensão  $O$ ” (NUSSENZVEIG, 2014, p. 72).

Seja um pêndulo físico qualquer, deslocado de um ângulo  $\theta$  em relação à posição de equilíbrio, pode-se supor que a força  $m\vec{g}$  atua sobre o centro de massa  $C$ , situado a uma distância  $h$  do ponto de suspensão  $O$ . Comparando com o pêndulo simples, verifica-se apenas uma diferença: no pêndulo físico, o braço de alavanca da componente restauradora  $mg \sin \theta$  é  $h$  e não o comprimento  $L$  do fio (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2018).

Figura 03 – Pêndulo físico



Fonte: o autor.

Ainda deve-se destacar que para o pêndulo físico devemos considerar o momento de inércia do pêndulo, uma vez que a oscilação é do corpo rígido contínuo,

e não de uma massa pontual. O *momento de inércia* define uma grandeza angular que representa “uma resistência à variação do momento angular”, análoga à massa inercial do caso translacional. Ela é definida por  $I = mr^2$ , onde  $m$  é a massa de uma partícula pontual que gira a uma distância  $r$  de um eixo de rotação. No caso de corpo rígido contínuo, ela é definida por  $I = \int r^2 dm$ , onde  $r$  é a distância de uma massa infinitesimal  $dm$  de um ponto de rotação.

Em relação a todos os outros aspectos, o estudo do pêndulo físico é idêntico ao do simples, permitindo concluir que, para pequenos valores de amplitude, o movimento é, aproximadamente, harmônico simples, cuja equação horária para o período é dada por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (24)$$

com  $I$  sendo o momento de inércia do pêndulo em relação ao ponto  $O$ , ainda proporcional a  $m$ , porém, dependendo da forma do pêndulo físico.

Vale ressaltar que, o pêndulo físico não oscila se o ponto de suspensão for o centro de massa, o que corresponde a fazer  $h = 0$  na equação (24). Nessa situação, tem-se  $T = \infty$ , o que implica que o pêndulo jamais chega a completar uma oscilação (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2018).

Um pêndulo físico ainda pode ser usado para verificar qual é a aceleração da queda livre  $g$  em um ponto específico da superfície terrestre. Para tanto, Halliday, Resnick e Walker (2018) citam como exemplo o pêndulo formado por uma barra homogênea de comprimento  $L$ , suspensa por uma das extremidades. Nesse caso, o valor de  $h$  na equação (24), que corresponde a distância do ponto de suspensão e o centro de massa, é  $L/2$  e o momento da inércia em relação a um eixo perpendicular à barra passando pelo centro de massa é  $\frac{1}{12}mL^2$ .

Na sequência, aplicando-se o teorema dos eixos paralelos ( $I = I_{CM} + mh^2$ ) é possível identificar que o momento de inércia em relação ao eixo perpendicular passando por uma das extremidades da barra é:

$$I = I_{CM} + mh^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2 \quad (25)$$

Pondo  $h = L/2$  e  $I = mL^2/3$  na equação (24) e explicitando  $g$ :

$$g = \frac{8\pi^2L}{3T^2} \quad (26)$$

De acordo com o autor, medindo  $L$  e o período  $T$ , é possível determinar o valor de  $g$  no local onde se encontra o pêndulo, sendo que, para medidas de precisão, são necessários alguns refinamentos, como colocar o pêndulo em uma câmara evacuada.

#### **4. A experimentação no ensino e aprendizagem de Física**

A Física é uma ciência que aborda a relação entre matéria e energia. “É um constructo humano cujo objetivo é levar à compreensão do mundo; como outras ciências ditas “exatas”, a Física ajuda no avanço de tecnologias e se desenvolve seguindo as premissas do método científico” (FUKE; YAMAMOTO, 2010, p. 03).

Dessa forma, a Física se configura como uma ciência experimental e, por isso, “envolve observação, organização de dados, pesquisa, capacidade de abstração e formulação de hipótese, e trabalho colaborativo”. (FUKE; YAMAMOTO, 2010, p. 03). Conseqüentemente, requer uma participação ativa, tanto daquele que se propõe a ensiná-la, como daquele que se propõe a aprendê-la, principalmente no que concerne à educação básica.

Todavia, a falta utilização de metodologias dinamizadas reforça um ultrapassado conceito disciplinar abstrato, o qual resulta em alunos cada vez mais desinteressados. Outro agravante é a escassez de laboratórios e materiais enfrentada pelas escolas, tornando o ensino desta disciplina rotineiramente limitado à lousa e sala de aula. E a aprendizagem do aluno, quando ocorre, se resume a fórmulas e teorias.

Sendo assim, se justifica o uso da experimentação para despertar o interesse e a participação ativa dos alunos, facilitando o ensino da Física e a efetivação da aprendizagem.

É dessa forma que se pode garantir a construção do conhecimento pelo próprio aluno, desenvolvendo sua curiosidade e o hábito de sempre indagar, evitando a aquisição do conhecimento científico como uma verdade estabelecida e inquestionável. Isso inclui retomar o papel da experimentação, atribuindo-lhe uma maior abrangência para além das situações convencionais de experimentação em laboratório (BRASIL, 2002, p. 84).

O que se verifica, contudo, é um confronto entre o que é fundamental, no que tange aos recursos educacionais, e os desafios enfrentados dentro das instituições de ensino, quando se constata a escassez dos mesmos. E, por isso, “um dos desafios é fazer os professores perceberem que os possíveis recursos didáticos são muito mais variados e disponíveis do que normalmente se supõe [...]” (SANTOS; PIASSI; FERREIRA, 2004, p. 06).

Dessa forma, o docente que atua no Ensino Médio pode buscar alternativas válidas, como utilização e adaptação de materiais de baixo custo ou de custo algum. Para Santos, Piassi e Ferreira (2004, p. 07):

A utilização destes materiais, em geral, permite que se realizem experimentos físicos sem a necessidade de ambientes especiais (laboratórios). Além disso, os fenômenos não ficam escondidos pela “caixa-preta” de equipamentos que o estudante não sabe exatamente como funciona.

O que se vislumbra diante de tantos desafios é a possibilidade de trabalhar com materiais simples e acessíveis, por meio das quais professores e alunos poderão construir seu próprio objeto de estudo. O contato com os materiais utilizados aproxima o aluno do conhecimento científico, pois demonstra a aplicabilidade da ciência física ao mundo real, permitindo-o testar hipóteses de forma criativa, a partir das propriedades conhecidas ou supostas dos materiais e dos testes a que são submetidos (SANTOS; PIASSI; FERREIRA, 2004).

## **5. Materiais e métodos**

Neste tópico, serão relatadas duas atividades práticas que consistem na simulação dos pêndulos simples e físico, cuja montagem foi realizada com o emprego de materiais de fácil acesso, como sucata e sobra de madeira. O intuito é apresentar e sugerir a construção de uma estrutura física simples, que contribua com o dinamismo didático, uma vez que este material pode ser confeccionado tanto pelo professor quanto pelo aluno, favorecendo o trabalho colaborativo e a observação real daquilo que lhes é retratado teoricamente.

Para realização da atividade com o pêndulo simples foram utilizados:

- 01 haste metálica, composta por sucata, presa a uma base de madeira;
- 01 haste metálica menor, para suspensão dos pêndulos;

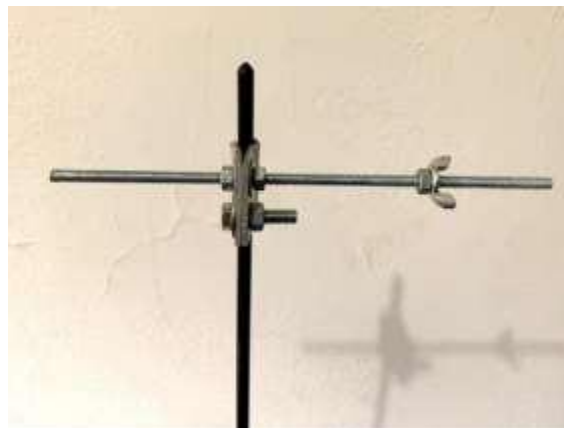
- 02 pêndulos simples, construídos com frascos de plástico preenchidos com areia artesanal, de massas 0,018kg e 0,030kg;
- Barbantes para suspensão dos pêndulos, com comprimentos ajustáveis para 0,10m e 0,30m;
- 01 transferidor;
- 01 régua; e
- 01 cronômetro.

**Fotografia 01: Haste maior presa na base de madeira**



Fonte: O autor

**Fotografia 02: Haste menor presa na haste maior**



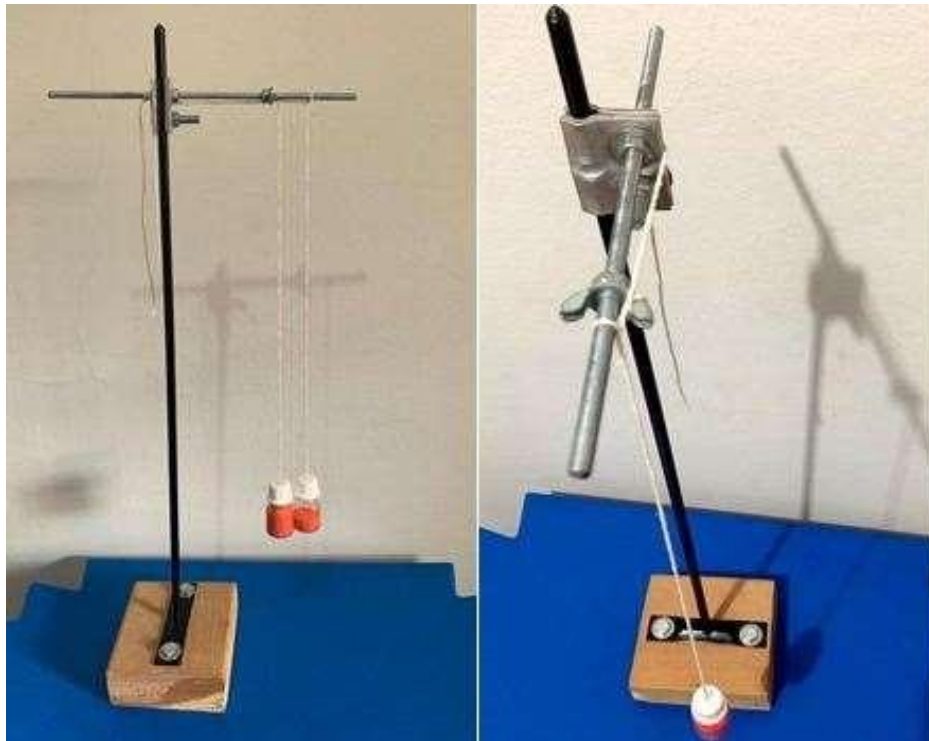
Fonte: O autor

**Fotografia 03: Frascos que compõem o pêndulo simples**



Fonte: O autor

**Fotografia 04: Montagem do equipamento**



Fonte: O autor

Primeiramente, foi posto em oscilação o pêndulo de 0,018kg, com comprimento de 0,10m, a partir de um ângulo de  $10^\circ$  formado com a vertical, estabelecido com ajuda do transferidor. Mediu-se o período de cinco oscilações completas com um cronômetro, optando-se por determinar seu valor mais provável por meio da média aritmética simples:  $\bar{X} = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5}{5}$ .

Na sequência, esse mesmo pêndulo teve seu comprimento ajustado para 0,30m e foi submetido aos mesmos procedimentos. Dessa mesma forma procedeu-se com o pêndulo de 0,030kg.

Em seguida, foi utilizada a equação (23) para cálculo da aceleração gravitacional no local onde se encontra o pêndulo, a qual foi configurada de forma mais conveniente, tal que  $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$ .

Na sequência, procedeu-se com a realização da atividade com o pêndulo físico. Os materiais utilizados foram os mesmos, com exceção do pêndulo, que passou a ser 01 barra metálica, doada por uma metalúrgica, de massa 0,086kg, comprimento 0,28m, com furos ao longo do comprimento e centro de massa coincidente com o centro geométrico.

**Fotografia 05: Barra metálica que compõe o pêndulo físico**



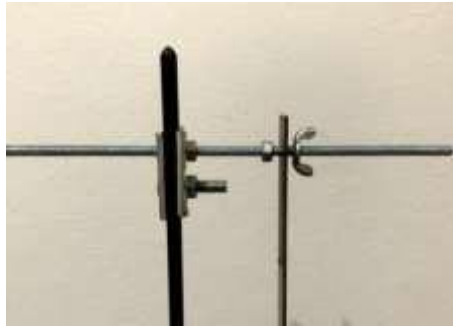
Fonte: O autor

**Fotografia 06: Montagem do equipamento**



Fonte: O autor

### Fotografia 07: Disposição do pêndulo na haste



Fonte: O autor

Num primeiro momento, o pêndulo físico foi posto para oscilar a partir de um ângulo de  $10^\circ$  formado com a vertical, estabelecido com ajuda do transferidor. Foram considerados como eixos de oscilação a extremidade e o centro de massa, e observado seu comportamento.

Em seguida, foi cronometrado o período de cinco oscilações, calculada sua média aritmética simples, como no experimento anterior, e utilizada a equação (26):  $g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}$ , conforme orientação de Halliday, Resnick e Walker (2018), para determinação da aceleração gravitacional no local do pêndulo.

## 6. Resultados e discussões

### 6.1 Pêndulo simples

Após medir o período de cinco oscilações completas e calcular seu valor mais provável por meio da média aritmética simples ( $\bar{X} = \frac{T_1+T_2+T_3+T_4+T_5}{5}$ ), os dados foram dispostos da seguinte forma:

Tabela 01: Períodos cronometrados para o pêndulo simples.

Período - T (s)			
m = 0,030kg e L =0,10m	m = 0,030kg e L =0,30m	m = 0,018kg e L =0,10m	m = 0,018kg e L =0,30m
0,64	1,09	0,64	1,12
0,61	1,1	0,68	1,18
0,64	1,18	0,63	1,04
0,63	1,01	0,65	1,07
0,69	1,07	0,56	1,08
<b>X = 0,64</b>	<b>X = 1,09</b>	<b>X = 0,63</b>	<b>X = 1,10</b>

Fonte: O autor

Constatou-se que os pêndulos de massas diferentes, porém, mesmo comprimento, apresentam períodos iguais, considerando a aproximação (tabela 01, colunas 1 e 3, e colunas 2 e 4). Assim como, um determinado pêndulo, com diferentes tamanhos, tende a apresentar um menor período de oscilação quanto menor for seu comprimento. A análise da equação (23) por si só permite concluir que a massa não exerce influência sobre o período, já que não consta na equação, assim como o tempo de duração do ciclo é proporcional ao comprimento.

Os dados relacionados à aceleração gravitacional, a qual foi obtida por meio da equação (23), ajustada para  $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$ , foram organizados como segue:

**Tabela 02: Determinação da aceleração gravitacional**

<b>Aceleração da Gravidade - g (m/s<sup>2</sup>)</b>			
<b>Para m = 0,018kg</b>		<b>Para m = 0,030kg</b>	
L (m)	0,10	L (m)	0,10
T (s)	0,63	T (s)	0,64
<b>g (m/s<sup>2</sup>)</b>	<b>9,95</b>	<b>g (m/s<sup>2</sup>)</b>	<b>9,64</b>
<hr/>			
L (m)	0,30	L (m)	0,30
T (s)	1,1	T (s)	1,09
<b>g (m/s<sup>2</sup>)</b>	<b>9,79</b>	<b>g (m/s<sup>2</sup>)</b>	<b>9,97</b>
<b>X = 9,84</b>			

Fonte: O autor

Neste caso, também foi considerada a média aritmética simples quanto ao valor da aceleração gravitacional ( $\bar{X} = \frac{g_1 + g_2 + g_3 + g_4}{4}$ ). Devido à perda de energia durante o experimento e a imprecisão na cronometragem, os valores obtidos não se igualam, mas se aproximam de forma satisfatória do valor real, admitido como sendo, aproximadamente, 9,8 m/s<sup>2</sup>.

## 6.2 Pêndulo físico

Ao analisar o movimento do pêndulo físico, pode-se verificar que existe oscilação quando o ponto de suspensão é a extremidade, o que possibilita determinar seu período. Todavia, quando o ponto de suspensão é o centro de massa, que coincide com o centro geométrico da barra, o pêndulo fica em equilíbrio.

Isto porque, a distância do ponto de suspensão até o centro de massa é igual a 0, o que equivale a colocar  $h = 0$  na equação (24). Conforme Halliday, Resnick e Walker (2018), nessa condição,  $T = \infty$ , o que permite compreender por que o pêndulo não chega a completar uma oscilação, ou seja, permanece em equilíbrio.

Essa situação também pode ser explicada pela inércia do pêndulo, que varia conforme ponto de suspensão: em relação ao centro de massa é  $\frac{1}{12}mL^2$ , e em relação à extremidade é de  $\frac{1}{3}mL^2$ . Como neste experimento a inércia se refere à resistência em alterar o movimento do pêndulo, onde ela for maior, maior essa resistência e, como verificado, isso ocorre com eixo de suspensão na extremidade.

Para proceder com o cálculo gravitacional, obtiveram-se os seguintes dados quanto ao período oscilatório:

**Tabela 03: Períodos cronometrados para o pêndulo físico**

Período - T (s)
0,89
0,86
0,83
0,88
0,89
$X = 0,87$

Fonte: O autor

Aplicando a equação (26):  $g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}$  temos:

**Tabela 04: Determinação da aceleração gravitacional**

Aceleração da Gravidade - g (m/s <sup>2</sup> )	
L (m)	0,28
T (s)	0,87
<b>g (m/s<sup>2</sup>)</b>	<b>9,74</b>

Fonte: O autor

Semelhante ao primeiro experimento, é preciso considerar que alguns fatores impedem um teste de precisão, principalmente o atrito da barra com a haste de sustentação e a realização da atividade em um local que possibilita perda de energia

para o ar. Todavia, ainda se verifica uma aproximação satisfatória da aceleração gravitacional em relação ao seu valor real.

## **7. Considerações finais**

A abordagem do pêndulo como objeto de estudo pode se dar em diferentes níveis, desde a educação básica, por meio dos conteúdos introdutórios de física, até o ensino superior, por meio de disciplinas ministradas, principalmente, nas licenciaturas e engenharias, com vistas ao conhecimento e controle das oscilações. E este estudo se faz relevante, uma vez que os movimentos oscilatórios podem ser observados em diversas situações do nosso cotidiano, das mais simples às mais complexas, desde um badalar de relógio até a vibração de grandes monumentos.

Existem vários tipos de pêndulos, sendo o simples e o físico alguns dos mais conhecidos e didáticos, geralmente escolhidos para abordagem prática. Entretanto, mesmo com uma simplicidade aparente, o conhecimento de física que é preciso para uma compreensão aprofundada pode não ser acessível para um estudante iniciante. Assim como, para obter resultados mais precisos, é necessário dispor de instrumentos de alto custo, inviabilizando sua aquisição em muitos laboratórios de ensino, impedindo seu estudo prático e detalhado.

Sendo assim, torna-se relevante ao docente um olhar para todas as possibilidades, além de estimular a criatividade em seus alunos no sentido de construir seu próprio material de estudo, com materiais acessíveis, muitas vezes sem custo algum, como no caso dos pêndulos apresentados nesse trabalho.

Conclui-se que o aporte teórico, junto ao experimento desenvolvido, ainda que simplista, contribuem para análise do comportamento dos pêndulos simples e físico e a interpretação de suas propriedades, principalmente quanto à irrelevância da massa e dependência do comprimento para o período verificado no pêndulo simples, e a influência da inércia sobre a oscilação dos pêndulos físicos, além da relação gravitacional em ambos os materiais de estudo.

## **8. Referências bibliográficas**

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais** –

**Ciências da Natureza, Matemática, e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 2002. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 05 set. 2020.

FUKE L. F; YAMAMOTO K. **Física para o Ensino Médio.** 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

HALLIDAY, D; RESNICK, R; WALKER, J. **Fundamentos de física, volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica.** 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

HELDEN, A.V. **Galileu e o pêndulo.** In: Openstax, 05 jul. 2007. Disponível em <<https://cnx.org/contents/2VmRqAYO@3/Galileo-and-the-Pendulum>>. Acesso em: 15 out. 2019.

LEITE, N. V. G. **Galileu e o Pêndulo.** In: História da Física, 15 jun. 2011. Disponível em: <<http://historiadafisicauc.blogspot.com/2011/06/galileo-e-o-pendulo.html>>. Acesso em: 15 out. 2019.

NUSSENZVEIG; H. M. **Curso de física básica, 2: fluidos, oscilações e ondas, calor.** 5. ed. São Paulo: Blucher, 2014.

SANTOS, E. I.; PIASSI, L. P. C.; FERREIRA, N. C. **Atividades experimentais de baixo custo como estratégia de construção da autonomia de professores de Física: uma experiência em formação continuada.** In: IX Encontro Nacional de Pesquisa em Ensino de Física, out. 2004. Disponível em <[https://www.researchgate.net/profile/Emerson\\_Izidoro/publication/266075202](https://www.researchgate.net/profile/Emerson_Izidoro/publication/266075202)>. Acesso em 08 set. 2020.

TIPLER; P.A.; MOSCA, G. **Física para cientistas e engenheiros, volume 1: mecânica, oscilações e ondas, termodinâmica.** Rio de Janeiro: LTC, 2016.