MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia

INSTITUTO FEDERAL DE RONDÔNIA
CAMPUS CALAMA - IFRO
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA - CCLF

O ENSINO E AS APLICAÇÕES DO CÁLCULO VETORIAL NA FÍSICA: UMA ABORDAGEM A PARTIR DO ESTUDO DE FORÇAS CONSERVATIVAS E NÃO CONSERVATIVAS

PORTO VELHO-RO

2022

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia

Nícolas Relvas Feitoza

O ENSINO E AS APLICAÇÕES DO CÁLCULO VETORIAL NA FÍSICA: UMA ABORDAGEM A PARTIR DO ESTUDO DE FORÇAS CONSERVATIVAS E NÃO CONSERVATIVAS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia - IFRO Campus Clama, como parte do requisito para a conclusão do curso de Licenciatura em Física, sob orientação do Prof. Me. Vlademir Fernandes de Oliveira Júnior.

PORTO VELHO-RO

2022

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia

INSTITUTO FEDERAL
Rondônia

Nícolas Relvas Feitoza

O ENSINO E AS APLICAÇÕES DO CÁLCULO VETORIAL NA FÍSICA: UMA ABORDAGEM A PARTIR DO ESTUDO DE FORÇAS CONSERVATIVAS E NÃO CONSERVATIVAS

Prof. Me. Vlademir Fernandes de Oliveira Júnior
(Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia

---

Prof. Dr. Cléver Reis Stein
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia

---

Prof. Me. Laffert Gomes Ferreira da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia

PORTO VELHO-RO

2022

RESUMO

Neste trabalho serão abordadas algumas dificuldades no ato de ensinar Física na Educação Superior, com um olhar mais circunscrito ao contexto do Cálculo Vetorial na Física. Serão também analisadas, brevemente, as dificuldades que circundam o Ensino Básico, como a dificuldade que os alunos e professores possuem de tratar de assuntos mais abstratos como a própria base dos vetores e como esta dificuldade se estende para o Ensino Superior. A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica, onde se analisou diferentes aspectos do Cálculo Vetorial no contexto das forças conservativas e não conservativas, explicando e apresentando os conceitos que os fundamentam, relacionando aspectos do Cálculo com a Física, tais como: trabalho, energia cinética, energia potencial e energia mecânica, fundamentando-as a partir de uma discussão contextualizada com a realidade e com o cálculo, como integrais, derivadas parciais, gradiente, integrais de superfície e rotacional. O objetivo é propor uma perspectiva melhor e tratar os conteúdos e temáticas mais avançadas no ensino aprendizado de Física e Matemática no Ensino Superior, de forma mais ampla e menos mecânica. A conclusão aponta que é produtiva a abordagem interdisciplinar entre Física e Matemática em um contexto mais amplo dentro das forças conservativas e não conservativas, utilizando de diversos recursos didáticos.

Palavras-chave: ensino, cálculo, matemática, física, aplicações, cálculo vetorial

ABSTRACT

In this work, some difficulties in the act of teaching Physics in Higher Education will be addressed, with a more limited look at the context of Vector Calculus in Physics. The difficulties that surround Basic Education will also be briefly analyzed, such as the difficulty that students and teachers have in dealing with more abstract issues such as the very basis of vectors and how this difficulty extends to Higher Education. The methodology used was bibliographic research, where different aspects of Vector Calculus were analyzed in the context of conservative and non-conservative forces, explaining and presenting the concepts that underlie them, relating aspects of Calculus with Physics, such as: work, kinetic energy, potential energy and mechanical energy, basing them from a discussion contextualized with reality and with calculus, such as integrals, partial derivatives, gradient, surface and rotational integrals. The objective is to propose a better perspective and deal with the most advanced contents and themes in the teaching and learning of Physics and Mathematics in Higher Education, in a broader and less mechanical way. The approach based on the interrelationship between Physics and Mathematics in a broader context within the conservative and non-conservative forces is shown to be fruitful, using various didactic resources.

Key-Words: teaching, calculus, mathematics, physics, applications, vector calculus

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Dentro do contexto do ensino e aprendizagem de Física, são abordados os princípios básicos do Cálculo Vetorial, relacionados a forças conservativas e não conservativas, onde são vistas as bases de alguns dos principais conceitos sobre as relações e transformações de energia, como o trabalho, energia cinética, energia potencial e energia mecânica, também apresentando a ideia de força, tanto pelas Leis de Newton, quanto por suas relações com as diferentes formas de energia.

Depois disso, é mostrado como se dá a conservação de energia e sua relação com forças conservativas, para isso, é necessária uma abordagem a partir do Cálculo Vetorial. Primeiramente é necessário entender sobre derivadas parciais e direcionais, para que haja o entendimento do conceito de gradiente e assim, relacionando-o com o conceito de força conservativa a partir do gradiente de uma certa função de energia potencial (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2015).

Depois de discorrer o sobre gradiente de energia potencial, então é discutida a relação entre o trabalho de uma força e a trajetória realizada pela partícula, mostrando como isso está associado com funções vetoriais definidas por um gradiente, a partir do conceito de integrais de linha e integrais de linha em um caminho fechado.

Após a discussão sobre forças conservativas, discute-se as forças não conservativas. De início são apresentados alguns exemplos mais familiares, para assim aplicar os mesmos princípios que mostram que uma força é conservativa, verificando se realmente valem, como conservação de energia mecânica e a própria definição de gradiente, como pode ser mostrado por Stewart.

São discutidas ainda outras forças, as que dependem do tempo ou da velocidade. Ainda é discutido outros aspectos sobre como identificar o tipo de força, de forma mais direta e precisa, passando pela definição de rotacional de um campo vetorial, mostrando como se relaciona, o que é definido por Butkov.

Apresenta-se, a relação interrelacionada entre o que é estudado em Física e em Matemática no contexto do Ensino Superior, podendo ser tratada de forma análoga à Educação Básica, devido as dificuldades serem, de certa forma, parecidas (ANTONOWISKI; ALENCAR; ROCHA, 2017).

Neste trabalho são abordados os fundamentos e o desenvolvimento da importância de um melhor ensino de Cálculo Vetorial no contexto da Física, propondo uma abordagem a partir do ensino de forças conservativas e não conservativas, apresentando e fundamentando os conceitos básicos e mais avançados da área.

2 METODOLOGIA

2.1 Metodologia e Objetivos da Pesquisa

A metodologia utilizada é a pesquisa bibliográfica, onde foi realizada a leitura e averiguação de diversos materiais e livros didáticos relacionados ao Ensino Básico e Superior, estudando suas diferentes metodologias e práticas, com isso, produzindo uma forma de se abordar vários dos conceitos e fundamentos do Cálculo e da Física, de uma forma mais contextualizada e prática, segundo o que é dito por Sousa, Oliveira e Alves (2021, p. 68).

> Através da pesquisa bibliográfica o pesquisador faz o levantamento de informações que sejam relevantes na construção da pesquisa científica. Dessa forma, em uma pesquisa científica, a pesquisa bibliográfica é importante no levantamento de informações relevantes que contribuam no desenvolvimento da pesquisa, na elaboração do tema e na revisão bibliográfica ou quadro teórico.

Na pesquisa bibliográfica realizada foram analisados livros e artigos relacionados aos conteúdos de Física, porém em áreas relacionadas ao Cálculo Vetorial, principalmente materiais comuns aos cursos de Ensino Superior. O objetivo não foi compilar informações sobre os materiais abordados, e sim aproveitar os conteúdos que cada livro apresenta e com isso, propor um ensino mais contextualizado, onde é apresentada na prática a relação entre o contexto de um fenômeno Físico, cujo desenvolvimento é fundamentado no Cálculo.

O problema apresentado, envolve características fundamentais e extremamente importantes para o ensino, independentemente de ser Ensino Básico ou Superior: como ensinar a resolver e tratar de problemas ou fenômenos físicos, utilizando de forma prática os conceitos da Física e da Matemática? Ou ainda, em outras palavras: como se dá o desenvolvimento da Matemática e da Física em um determinado problema ou fenômeno? É nestas perguntas em que a pesquisa se fundamenta, assim como é ressaltado por Sousa, Oliveira e Alves (2021, p. 72).

> O primeiro passo para desenvolver uma pesquisa é a elaboração do tema, que por ser muito amplo deve ser delimitado pela identificação do problema. Essa delimitação levará a elaboração de hipóteses e organização do trabalho. Concomitante a isso deve se fazer a busca das fontes que colaboram para a verificação das hipóteses, assim como a solução ou compreensão do problema.

Para tentar responder estas perguntas, foi escolhido para a pesquisa o Cálculo Vetorial e suas aplicações na Física. Dentro do Cálculo Vetorial, surgem conceitos mais abstratos como o de vetores e campos vetoriais, abrangendo suas propriedades. Na Física, muitos princípios do Cálculo Vetorial surgem constantemente, como em mecânica e eletromagnetismo por exemplo, pois conforme mais se avança nos estudos da Física menos a manipulação de vetores torna-se conveniente. Em muitas situações surgem vetores que não são simétricos, que não podem simplesmente ser somados ou que possuem um significado mais profundo, abrangendo propriedades além de simplesmente "somar ou subtrair". Algumas características importantes de certos fenômenos só podem ser melhor compreendidas se olharmos os vetores por um ângulo mais amplo como dito por Marion e Thornton (2011, p. 1).

2.2 O uso do *Geogebra*

O *Geogebra* é um *software* multiuso onde se é possível plotar gráficos de diversos tipos, desenhar figuras geométricas seja no plano ou no espaço, realizar regressão e aproximações, configurar tabelas, dentre muitas outras funções.

Uma de suas principais funcionalidades, ou ainda uma construção que é possível de ser realizada dentro da plataforma, é a elaboração de experimentos virtuais semelhantes aos apresentados no *PHET*. Todas essas ferramentas e possibilidades dentro do *Geogebra*, o torna extremamente útil para o ensino não só de Física e Matemática, mas também de diversas outras áreas.

Diante da importância do uso de tecnologias no ensino, e o quanto pode acrescentar em uma melhor forma de ensinar e apresentar os conceitos abordados, neste trabalho, o *Geogebra* foi utilizado de diversas formas, principalmente para a construção das figuras, onde mesmo que não sejam gráficos, suas opções de ferramentas para a construção de figuras geométricas possibilitam que os usuários possam criar esquemas e figuras convenientes ao uso dado.

Esquemas como de plano inclinado, são apresentados na Figura 4, onde com auxílios de suas ferramentas, é possível acrescentar retas e figuras geométricas com tamalho e área estabelecidos previamente e até mesmo plotar vetores. Na Figura 3, é usada uma ferramenta que simula a integral pela soma Riemann, ou ainda a Figura 6, onde é desenvolvida uma superfície na versão do *Geogebra 3D*. Segundo Wolff e Silva:

> Os softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, estimulam a investigação através da experimentação proporcionada pelo contato com a ferramenta durante a criação da figura. Neste processo, as suas propriedades podem

> ser compreendidas, de forma que ao serem manipuladas percebe-se que suas propriedades são mantidas. Desta forma, o software proporciona a interatividade do aluno com a ferramenta, de modo investigativo, além de proporcionar a pesquisa da teoria de forma prática através de demonstrações. (WOLFF; SILVA, 2013, p. 8)

O uso de ferramentas como esta, é essencial ao ensino, visto sua facilidade e intuitividade no uso, onde não é necessário grandes conhecimentos, apenas criatividade e curiosidade.

3 A RELAÇÃO FÍSICA MATEMÁTICA NO ENSINO E APRENDIZAGEM

3.1 A importância da relação entre Física e Matemática no ensino

O desenvolvimento da Física e da Matemática sempre estiveram juntos, onde diversas ideias e teorias, produto da interrelação dessas ciências puderam, de certa forma, enriquecer as disciplinas e, em muitos casos, tornar a relação entre elas mais forte. Conforme a Matemática se desenvolve, torna-se possível que fenômenos físicos, até então incompreensíveis, possam ter uma luz a partir do desenvolvimento de novas teorias matemáticas. Exemplos, como a Geometria Riemanniana para o desenvolvimento da Relatividade Geral, ou até mesmo, o desenvolvimento do Cálculo para quase todas as ciências após, demonstra este fato. Reconhecer isso é de vital importância para o progresso não só da Física em si, mas das ciências como um todo, como diz Bassanezi (2011, p.19): "O reconhecimento de uma teoria científica passou a ter como condição necessária o fato de poder ser expressa em uma linguagem matemática."

Apesar disto, na prática, pouco é desenvolvido durante os cursos de Ensino Básico, onde por diversos motivos, entre eles a falta de estrutura e de preparo do corpo docente, muito da relação interdisciplinar entre a Física e a Matemática é perdida. Tudo isso implica em uma separação entre ambas as disciplinas, fazendo com que muitas ideias fossem se dissolvendo e se perdendo, indo para um pensamento de que a Matemática utilizada na Física pertence a outra realidade completamente diferente, sendo que na prática, a Matemática é o que fundamenta a Física. Esta visão é ainda estendida para os cursos de Ensino Superior, não ficando muito atrás quando se trata de perda da qualidade de ensino, sendo que esta perspectiva, a de uma relação interdisciplinar e mais profunda, já devia ser apresentada desde o Ensino Básico (OLIVEIRA JUNIOR, *et al.*, 2020, p. 4).

Por outro lado, muitos livros didáticos não abordam como deveriam tal relação, tornando os livros didáticos cada vez mais simplificados, dando a ideia de passar a autonomia do estudo para o aluno, porém, sem apresentar corretamente a base necessária para tal, sendo tudo de forma muito mais a resolver exercícios numa espécie de repetição sem fim, onde há apenas um algoritmo a ser aplicado de forma mecânica. O ensino, na prática, tem se tornado cada vez mais ferramental e pouco abrangente, onde a ideia de resolução de exercícios como único aspecto para a métrica do conhecimento, torna muitos alunos distantes e desinteressados em áreas que são tão onipresentes no nosso cotidiano.

> A importância da Resolução de Problemas para o desenvolvimento da Ciência tem inspirado diversos pesquisadores da área de ensino a avaliar a relevância dos mesmos no contexto escolar. Entretanto, parece-nos que alguns têm demonstrado uma visão ingênua/ferramental em relação ao papel da matematização na Ciência Moderna. (KARAM e PIETROCOLA, 2009, p. 2)

Como dito por Karam e Pietrocola (2009), temos que esta perspectiva de resolução de problemas é extremamente importante para o desenvolvimento da Ciência e do ensino, isto é, a importância de uma abordagem Matemática mais apurada e contextualizada que na perspectiva do ensino seria a base para o que seria o progresso educacional. Porém, esta visão é deturpada por metodologias de cálculo mecânico e repetitivo, que não deixa de ser importante pois a prática leva a compreensão, no entanto, tais áreas do conhecimento são muito mais que isso.

O conhecimento nasce da reflexão daquilo que se está fazendo. Para o ir além do conhecimento de mundo, torna-se indispensável um estudo mais aprofundado, um pouco longe da ideia de "aplicação," mas do conhecimento e entendimento em si. Apesar disso, até mesmo aspectos experimentais, que são tão importantes para a Ciência e para o ensino desta, são perdidos ou ignorados, tornando o Ensino de Ciências e de Matemática, quase que inútil, por não se tratar de uma reflexão sobre a solução de problemas, mas de uma busca por respostas vagas e de pouca utilidade, através de uma "receita" matemática.

Aqui tem-se como interpretação, nem a Matemática e nem a Física como entes separados, ambas foram de grande importância para o desenvolvimento uma da outra, e em estudos mais avançados, parecem indistinguíveis. Sendo sua separação, apenas conveniente, como dito por Oliveira Júnior *et al* (2020, p. 3). Mas principalmente a Física como a que se desenvolveu mais devido a Matemática como sua base. Dito isto, uma das áreas da própria Matemática que é a mais presente e de certa forma o que fundamenta a descrição de muitos fenômenos Físicos é o Cálculo. Este por sua vez está presente no desenvolvimento de diversos problemas.

> [...] apresenta-se a Matemática como estrutura fundamental da natureza. A separação entre ambas, Física e Matemática, se dá apenas para fins de interpretação mais simplificada. (OLIVEIRA JÚNIOR *et al*., 2020, p. 3)

O desenvolvimento da Física está intimamente relacionado ao do Cálculo, onde estes fundamentaram a ideia de Derivadas e Integrais, assim como taxas de variações em Equações Diferenciais, tornado a Física muito mais "Matemática", o que, na verdade, tornou possível que diversos fenômenos pudessem ser melhor explicados e previstos a partir desta. Essa beleza interdisciplinar, no entanto, parece desaparecer no Ensino Básico, onde só seria vista melhor no Ensino Superior e mesmo neste, há um exagero e falta de contextualização entre tais áreas, o que torna não muito diferente do Ensino Básico.

> No entanto, parece que a articulação que se faz necessária entre as duas áreas está restrita ao mundo científico teórico e experimental, ficando a área educacional sujeita aos tradicionais sistemas de ensino compartimentados. Diante deste fato, até mesmo as origens históricas do surgimento do Cálculo através da Física são esquecidas, e muitas vezes até desconhecidas por alguns professores. (SANTAROSA, p. 318)

Assim, além de o conhecimento científico ser fragmentado devido a um sistema de ensino mecânico, perdemos o essencial nisto tudo, o ensino contextualizado e interdisciplinar.

3.2 As dificuldades no Ensino Fundamental e Médio

Os Ensinos Fundamental e Médio são a base para estudos mais aprofundados na universidade e, apesar disso, muito dessa base é perdida logo nos anos iniciais. Ao longo desse período de estudos, a falta de conhecimentos fundamentais é extremamente impactante no desenvolvimento estudantil e tal deficiência pode seguir o estudante à universidade.

Em disciplinas como Matemática e Física, não poderia ser diferente, principalmente quando se trata de assuntos mais complexos e abstratos, como por exemplo, vetores. Vetores são entes matemáticos com inúmeras aplicações, mas que devem ser tratados com atenção redobrada, pois suas interpretações e métodos de cálculo são muito diferentes dos aplicados a grandezas escalares.

O ato de ensinar Física deveria estar sempre atrelado a interpretação de mundo, aos princípios que relacionam a interpretação de fenômenos físicos e a devida matemática necessária, no entanto, não é isso o que acontece, como dito por Antonowiski, Alencar e Rocha (2017, p. 51).

> A Física no ensino médio deve assegurar que a competência investigativa resgate o espírito questionador, o desejo de conhecer o mundo onde se habita, logo é uma ciência que permite investigar os mistérios do mundo, compreender a natureza da matéria macroscópica e atômica.

Assim, o conhecimento e o estudo de Física devem sempre estar relacionados ao ambiente e ao mundo que nos cerca. O excesso de *matematização* e exercícios que não são muito criativos, tornam o ato de ensinar física extremamente desgastante.

> Presenciamos nas escolas de ensino médio, professores de Física encontrando dificuldades em construir conhecimento junto com seus alunos, de maneira que o entendimento nesta área seja prazeroso e contextualizado. Algumas vezes a Física é vista pelos docentes como uma disciplina difícil de ser ensinada. Isto contribui com o desinteresse e dificuldade de aprendizagem dos conteúdos por parte dos alunos. (ANTONOWISKI, ALENCAR, ROCHA; 2017, p. 52)

Na base do ensino de vetores, é mostrado apenas como subtrair, somar e decompor vetores, porém, pouco é mostrado de forma prática, pois mais tarde, será necessária para o estudo de Leis de Newton e Cinemática Vetorial, ou até mesmo em forças e campos elétricos. Esse déficit, ao final do Ensino Básico e começo do Ensino Superior, tornará o ensino ainda mais complicado.

3.3 As dificuldades no Ensino Superior

Muitas vezes, durante os estudos de Cálculo e Física, depara-se com diversos conceitos, que são totalmente abstratos. No entanto, existem aqueles que não são tão distantes e podem ser estudados e possuem diversas aplicabilidades em diversas situações, que no final, não passam de generalizações de conceitos mais básicos.

Apesar das aplicabilidades (não só meras aplicações, de fato as fundamentam), tais conteúdos são abordados de forma muito direta e até mecânica demais, enfatizando apenas resoluções de equações, mesmo na Física. Falta contextualização, uma forma mais geral de se observar e ensinar tais abordagens.

> [...] um aspirante a pedreiro aprende a profissão praticando; ele necessita apenas de reproduzir aquilo que uma outra pessoa fazia para assumir a profissão, ele não será interpelado em nenhum momento sobre o porquê ou como ele está fazendo o serviço. (BORGES, 2014, p. 150)

Assim, o ensino tem se tornado cada vez mais voltado para uma forma mais técnica, onde o objetivo seria realizar uma determinada ação, mas com pouco ou nenhum questionamento sobre o que está sendo feito e o seu contexto com o mundo.

Um outro problema seria a forma como os livros abordam tais conteúdos, apenas contentando-se com as demonstrações de alguns teoremas, mas de fato não apresentando muito mais que isso, mesmo em livros de Física. As demonstrações não deixam de ser importantes, mas tal área não é apenas isso. No contexto da Física, tal abordagem é comum, porém no momento de apresentar como isso sustenta a explicação de determinados fenômenos, as explicações se perdem e o cálculo passa a ser apenas uma espécie de "forma de bolo".

Um exemplo prático de como a relação entre Matemática e Física é abordada em muitos livros é de problemas do tipo "calcule", onde o objetivo seria apenas encontrar resultados aplicando um método pré-estabelecido, sem se preocupar com o significado. Sabe-se que essa forma é útil para praticar e compreender melhor o passo a passo da resolução de um problema, porém, muitos materiais se atentam apenas a isso.

Em livros de Física, dentro do contexto do Cálculo Vetorial, em áreas como na mecânica e no eletromagnetismo, pouco é apresentado sobre conceitos relacionados a campos vetoriais, gradiente, rotacional ou até divergente, envolvendo integrais de linha e de superfície, alegando muitas vezes que tais conceitos e responsabilidades pertencem ao Cálculo, no entanto, quase nunca é feita uma "ponte" ou ligação entre ambas, contextualizando e fundamentando uma a outra, voltando a ideia de uma "receita" de bolo a ser utilizada.

Apenas dizer que "trabalho é a força vezes o deslocamento" não é suficiente, deve ser realizada uma análise mais profunda, sustando e apresentando fundamentalmente cada variável relacionada ao conceito e o que este tem haver com a realidade, pois é sobre isso que a Física se trata.

4 A FÍSICA E O CÁLCULO VETORIAL

Diversos fenômenos necessitam de uma abordagem mais aprofundada, principalmente quando seu significado não é muito claro ou abstrato demais, como as diferentes velocidades em um fluido ou as forças elétrica e gravitacional. Surgem então novas “ferramentas”, que não só auxiliam na manipulação de tais fenômenos, mas são vitais para a compreensão de seu significado.

Se pensarmos, por exemplo, em uma força como a gravitacional, sabe-se que esta torna-se cada vez mais fraca conforme os objetos do sistema, como dois planetas, distanciam-se um do outro. A direção da força é a mesma, direcionada para o centro do corpo, porém seu módulo muda com a distância. As propriedades de vetores convencionais ainda valem, porém se quisermos entender melhor a força, deveremos levar em conta como ela varia com relação a distância e o fato de a direção ser uma só.

Apesar de diversas propriedades e formas de se trabalhar, o que acontece é que em muitas vezes, de forma até negligente, há único foco nas demonstrações de teoremas, o que de forma geral, acaba por tornar a área como sendo um amontoado de exercícios para serem resolvidos de forma mecânica. Esta é a forma como os livros, alguns trabalhos em sala de aula abordam tais conteúdos, o que por sua vez, retira o que há de mais importante no desenvolvimento da Física; sua correlação com a natureza, como é dito por Meyer *et al* (2011, p. 20) em uma analogia: “Conta-se sempre a história do professor que colocava um cartaz na porta de sua sala ‘deixe esta porta sempre fechada’ e alguém acrescentou ‘quando estiver aberta’”.

A abordagem de Meyer diz respeito a ideia que muitos professores, que pode ser ampliado para fora do Ensino de Matemática e indo também para o Ensino de Física, a pura demonstração de princípios fundamentais, com a intenção de tornar o conteúdo mais “rico” por assim dizer. O que na realidade confundiria bastante os alunos, mas não deixando, de forma alguma, as demonstrações como um mero “detalhe”.

A falta de averiguação do material de caráter teórico, sendo voltado para o ensino e aprendizagem, no que diz respeito ao desenvolvimento das práticas de Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior, mais especificamente o Cálculo Vetorial, torna o ensino da Física como um todo muito mais difícil. Assim, a contextualização e um caráter de Modelagem Matemática faz-se necessário, onde segundo Meyer (2011, p. 25), “O sujeito do processo cognitivo é o *aprendedor*, é o aluno. Cada pessoa constrói o seu conhecimento, o sujeito atribui significados pelos próprios meios. “.

Tendo-se em vista as dificuldades apresentadas, nesta pesquisa foi realizada uma abordagem a partir de um olhar crítico–reflexivo, onde o principal objetivo foi averiguar propostas que culminassem na reflexão dos métodos de ensino em sala de aula e como poderiam ser no desenvolvimento de alguns problemas de Física e suas interrelações a partir do Cálculo Vetorial.

> De fato a Física não é Matemática. Contudo não há como fugir da articulação que se faz necessária no ensino, entre as duas áreas. Não levar em conta esta possível articulação pode subentender um isolacionismo da matemática com relação às áreas científicas. (SANTAROSA; MOREIRA, 2011, p. 319).

Pensando em uma melhor forma de abordar o estudo do Cálculo em sala de aula, nas aulas de Física, pensou-se em um ensino mais contextualizado, onde as definições e o desenvolvimento das equações que modelam os problemas fossem apresentados da forma mais clara possível, mas sem tirar destas o desafio de desbravá-las; compreender fundamentalmente os princípios é essencial.

5 FORÇAS CONSERVATIVAS E NÃO CONSERVATIVAS

5.1 Relações fundamentais entre força e energia

Ao lidarmos com o que chamamos de “energia” muitas dúvidas e questionamentos aparecem. O que é energia? Como a medimos? Para que serve? De onde vem? Fora das especulações e de aspectos filosóficos mais abstratos, compreende-se que a energia é uma propriedade de todo sistema físico, existindo de diversas formas e a todo momento se transformando de uma para outra. De fato, energia é algo que pode ser (dentro de alguns limites), calculado e mensurado, mas defini-la de forma exata é difícil devido ao quão amplo e o quão complexo pode ser (HALLIDAY; RESNICK, 2015, p. 145).

Partindo de sistemas mecânicos simples, ou seja, aqueles que se encontram em um referencial inercial e que não seja dissipativo, é possível dar início a discussão segundo algumas formas mais básicas de energia, sendo estas: Trabalho, Energia Cinética e Energia Potencial. Destas formas de energia, pode-se mostrar o principal conceito que as fundamentam, a conservação de energia.

Quando um determinado sistema mecânico possui certa quantidade de energia “acumulada”, pode ocorrer de essa quantidade total inicial de energia acabar se dispersando pelo sistema ou para fora dele. O princípio da conservação de energia diz que se somarmos toda essa energia que acabou se dissipando com a energia ainda presente no sistema, o valor total será o mesmo de antes da energia referida se dissipar. A energia não é perdida, ela se transforma.

Se a energia se transforma e se conserva, então é possível dizer que determinadas formas de energia podem estar relacionadas, ou seja, que os agentes por trás da transformação de uma em outra também podem estar relacionados entre si, nesse caso forças, e com suas respectivas quantidades de energia transformada (ALONSO; FINN, 2012, p. 142).

Em muitos sistemas mecânicos, simples ou mais complexos, por exemplo, é muito mais “fácil”, ou ainda, menos trabalhoso, lidar conforme os princípios e tipos de energia envolvidos, pois a energia é uma grandeza escalar e trabalhar com escalares é bem mais conveniente do que com grandezas vetoriais, porém, a análise da conservação e não conservação de energia torna seu estudo bem mais complicado, mesmo para uma única partícula e um sistema simples (TAYLOR, 2013, p. 105).

5.1.1 O Trabalho de uma Força

Há sempre, na linguagem popular, o uso do termo "trabalho" como algo relativo a esforço, dizer que algo deu muito "trabalho". Na Física, esse conceito é mais amplo, abordando um caráter referente à transferência de energia, algo bem mais complexo relacionado ao "esforço" por parte de um "agente", que seria o causador de determinada ação sobre um corpo, alterando assim seu estado de movimento (BARROS; SANTOS, 2011, p. 28).

De forma geral, o trabalho está na maioria das vezes associado a uma força de alguma natureza, seja ela uma força de contato ou uma força de campo (como a gravitacional ou elétrica, por exemplo). A partir disso, afirma-se que os conceitos de "trabalho" e de "movimento" estão profundamente relacionados.

5.1.2 Trabalho de uma Força Constante

Se uma única força F está agindo sobre uma partícula ou objeto de massa m, estando inicialmente em repouso com relação a um referencial apropriado (inercial), este tende a entrar em movimento passando a ter uma aceleração a. Isto é a Segunda Lei de Newton, $F = ma$, diz (THORNTON; MARION, 2011, p. 44). Uma força aplicada sobre um determinado corpo altera seu estado de movimento, fazendo-o mudar de uma certa posição para outra no espaço, em outras palavras, a força realizou trabalho (uma força pode também gerar torque, fazendo-o rotacionar ou ainda, deforma-lo).

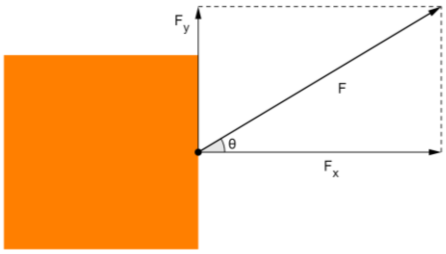
O trabalho realizado, em geral, está relacionado com a força liquida total aplicada e ao deslocamento realizado. Pode-se partir da seguinte definição: para alterar o estado inicial de movimento de determinado objeto, uma força deve agir sobre este, o que implica em uma aceleração. Quanto maior a massa do corpo, maior será a força que deve ser aplicada para que consiga manter a mesma aceleração, no entanto, quanto maior for a força aplicada, maior será o esforço por parte de "quem" ou "o que" é responsável por esta força. Basta imaginar alguém tendo que empurrar ou puxar algo.

Fundamentalmente, o trabalho w realizado por uma força constante F, aplicada sobre um objeto que sofreu um deslocamento d, pode ser definido como o produto da força resultante pelo deslocamento realizado e pelo cosseno do ângulo θ entre eles, como diz Alonso (2012, p. 130), ou seja:

$$w = F.d.cos(\theta) \tag{1}$$

Um corpo que se move em linha reta devido a ação de uma certa força, sendo puxado por uma corda por exemplo, e esta não sendo paralela a direção do deslocamento, possui duas componentes, uma que de fato é paralela a direção do movimento, F_x, e outra que é perpendicular, F_y. A primeira é responsável pelo movimento de translação do objeto, enquanto que a segunda é responsável por um movimento de rotação, ou seja, realiza torque, como pode ser visto na Figura 1, assim esta não realiza trabalho (ALONSO, 2012, p. 130). Há também outras forças que também não realizam trabalho, como as que não alteram o modulo da velocidade, como a força centrípeta ou a força magnética, por exemplo.

Figura 1 – Diagrama de forças sobre um objeto sendo puxado



Fonte: Elaborada pelo autor com o Software Geogebra, 2022.

Uma forma melhor de representar o trabalho realizado por uma força é usar o fato de que tanto a força quanto o deslocamento são grandezas vetoriais, pois é a componente paralela ao deslocamento que realiza trabalho. Apresentando de uma forma melhor (NUSSENZVEIG, 2013, p. 164), o trabalho pode ser representado por um produto escalar, assim: seja um corpo sob a influência de uma força constante, definida por $\vec{F}$, sofrendo um deslocamento definida por um vetor $\vec{r}$, o trabalho realizado é dado pelo produto escalar entre $\vec{F}$ e $\vec{r}$:

$$w = \vec{F} \cdot \vec{r} \tag{2}$$

Para definirmos melhor o cálculo do trabalho, pode-se utilizar uma propriedade do produto escalar. Segundo Butkov (1983, p. 12), sejam dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e o cosseno do ângulo entre eles, θ, tem-se pela definição dada por:

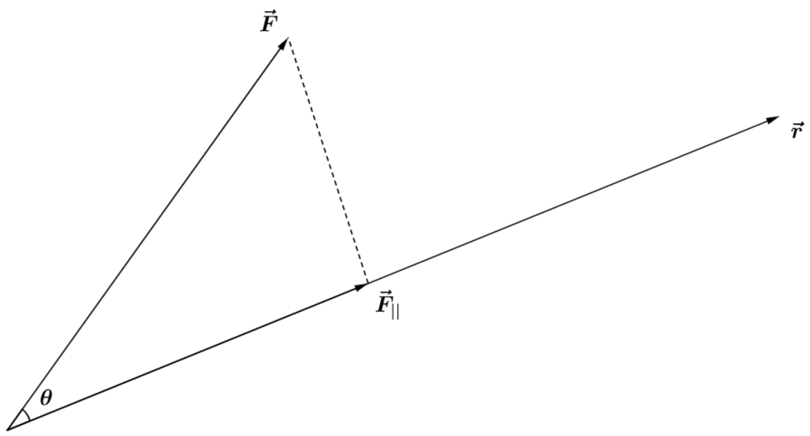
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\theta) \tag{3}$$

Assim, aplicando a Eq. 3 na Eq. 2, fazendo $r = |\vec{r}|\ e\ F = |\vec{F}|$, o trabalho realizado por uma força pode ser escrito como:

$$w = F.r.cos(\theta) \tag{4}$$

Assim, se o modulo da força, o modulo do deslocamento e o ângulo entre eles forem conhecidos, então pode-se calcular o trabalho, o que recai na definição dada pela Eq. 1. Na Figura 2 o diagrama exemplifica o que está sendo representado pela Eq. 4:

Figura 2 – Representação do produto escalar no contexto do cálculo do trabalho de uma força



Fonte: Elaborada pelo autor com o Software Geogebra, 2022.

5.1.3 Trabalho de uma Força Variável

As definições apresentadas até o momento partem da ideia de que a força que está sendo trabalhada é constante em modulo, direção e sentido, assim como o deslocamento. No entanto, não é sempre assim. Para forças como a Lei de Hooke, $F = -kx$, a Lei da Gravitação Universal, $F = -G\frac{Mm}{r^2}$, a Lei de Coulomb, $F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Qq}{r^2}$ e entre outras que são dependentes da distância ou do deslocamento do objeto. Forças deste tipo não são constantes ao longo de posições diferentes. Isto implica que as formulações anteriores não são suficientes, e devem ser utilizadas de outra forma.

Para uma força não constante durante o deslocamento, podemos usar da seguinte forma: uma força definida por $F = F(r)$, ou seja, dependente apenas do deslocamento r, age sobre um objeto e este sofre um deslocamento Δr muito "pequeno", de tal forma que, para um ponto r_i^* dentro do intervalo Δr, a força é aproximadamente constante, $F \cong F(r_i^*)$.

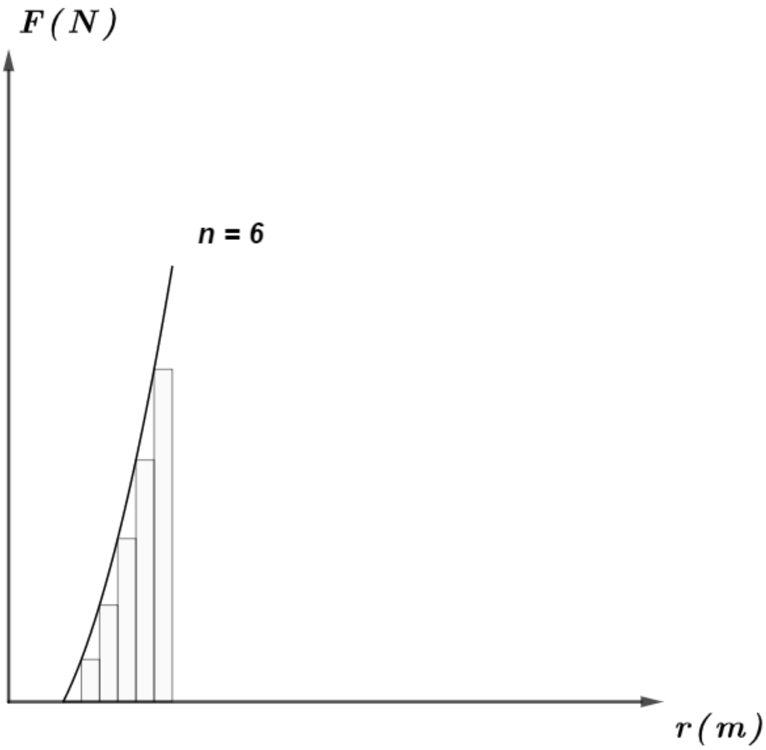
Se pensarmos em uma sucessão de deslocamentos Δr, teremos uma quantidade de trabalho realizado para cada intervalo, Δw, e assim:

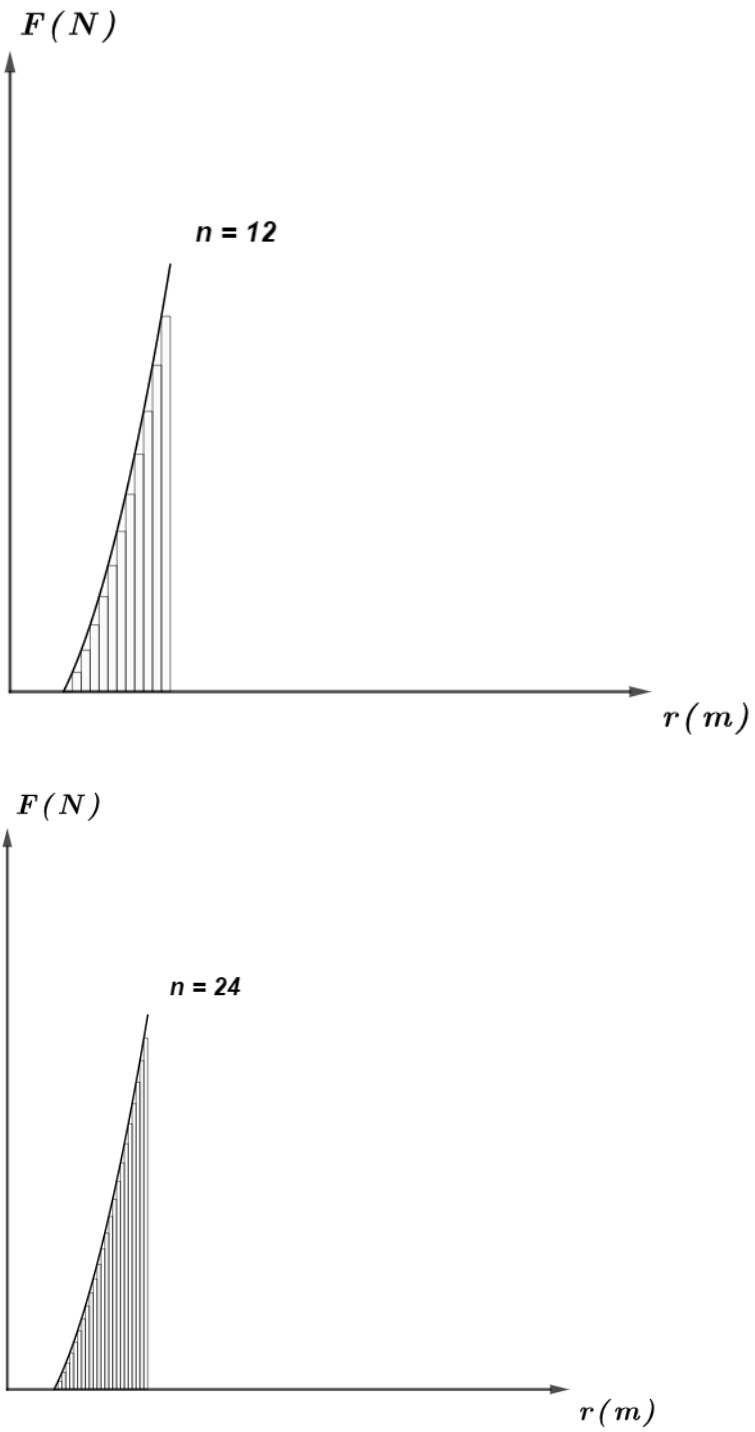
$$\Delta w = F(r_i^*)\Delta r \tag{5}$$

O trabalho realizado está associado ao deslocamento entre dois pontos de uma trajetória definida pela função $r = r(t)$, partindo de r_i até a posição final em r_f, o tamanho de cada deslocamento Δr é definido pela quantidade n de partes em que o trajeto de r_i para r_f foi divido, sendo definido por $\Delta r = \frac{r_f - r_i}{n}$, como mostra a Figura 3. O trabalho realizado é aproximadamente a soma dos trabalhos realizados nos intervalos sucessivos de deslocamento Δr:

$$w \cong \sum_{i=1}^{n} F(r_i^*)\Delta r \qquad 6$$

Figura 3 – Representação gráfica da Soma de Riemman para o cálculo do trabalho. Onde n é o número de retângulos sobe o gráfico de $F(r)$, que representam o trabalho realizado. Quanto maior for n melhor será a aproximação.





Fonte: Elaborada pelo autor com o Software Geogebra, 2022.

Fazendo os deslocamentos se tornarem cada vez mais estreitos, $\Delta r \to 0$, e aumentando sua quantidade, tendendo ao infinito, $n \to \infty$. O trabalho torna-se o limite desta operação:

$$w = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(r_i^*)\Delta r \qquad 7$$

Este somatório é a chamada Soma de Riemann (SANTOS, BARROS, 2012, p. 18) e pode ser reescrito como uma integral, assim:

$$w = \int_{r_i}^{r_f} F(r)dr \qquad 8$$

Onde o trabalho realizado por uma força não constante e dependente apenas do deslocamento, é a integral desta com relação ao deslocamento, a partir da posição inicial em r_i até a posição final em r_f. A dedução apresentada foi baseada na realizada por Nussenzveig (2013, p. 144).

5.2 Energia Cinética e Trabalho

De fato, se uma força resultante não nula age sobre um corpo, este tende a alterar seu estado de movimento, isto é o que a Primeira Lei de Newton diz. Um corpo que está inicialmente em repouso e passa a sofrer influência de uma força externa tende a entrar em movimento, adquirindo uma aceleração, o que altera sua velocidade, isto a partir da Segunda Lei de Newton (Nussenzveig, 2013, p. 94).

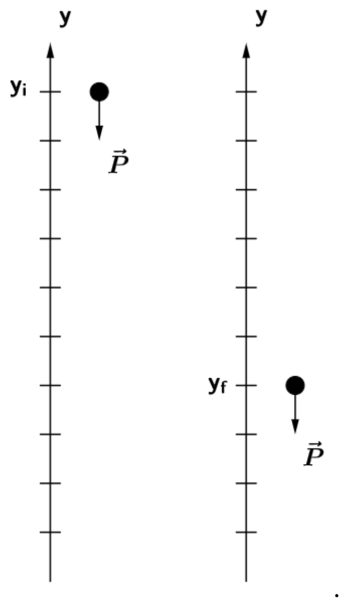
O movimento é a chave para o conceito de energia cinética, pois por mais que uma força seja difícil de se interpretar ao longo de sua ação em determinado corpo, percorrendo certa trajetória, é possível compreender mais deste movimento apenas nos termos da velocidade (ALONSO; FINN, 2012, p. 135).

5.2.1 Energia Cinética e Trabalho de uma Força Constante

Há algo a ser comentado com relação ao trabalho realizado por uma força. Na Figura 4 temos o exemplo de um objeto em queda livre, partindo do repouso, a partir de uma altura y_i, chegando até uma altura y_f onde sabe-se que a força que age sobre este objeto é a força gravitacional, direcionada para baixo, e é dada por:

$$P = -mg \qquad 9$$

Figura 4 – Objeto em queda livre a partir de uma altura y_i, sob ação da força peso.



Fonte: Elaborada pelo autor com o Software Geogebra, 2022.

O peso dado pela Eq. 9 é uma força e realiza trabalho sobre o objeto em queda. Unindo a Eq. 9 à Eq. 4 e sabendo que o deslocamento é dado por $\Delta y = y_f - y_i$, tem-se o trabalho realizado pela força peso:

$$w = -mg\Delta y \qquad 10$$

Como o objeto está em queda livre, podemos encontrar sua velocidade a partir da equação de Torricelli:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta s \qquad 11$$

Onde v_f é a velocidade final, v_i é a velocidade inicial, a é aceleração do corpo e Δs é a distância percorrida. Aplicando a Eq. 11 ao problema tem-se:

$$v_f^2 = v_i^2 - 2g\Delta y \qquad 12$$

Mas a aceleração gravitacional g é dada pelo peso P, $g = \frac{P}{m}$, segundo a Eq. 9 e assim, a Eq. 12 pode ser escrita como:

$$v_f^2 = v_i^2 - 2\frac{P}{m}\Delta y \qquad 13$$

Se multiplicar ambos os membros da equação pela massa m, rearranjando os termos tem-se:

$$mv_f^2 = mv_i^2 - 2P\Delta y \qquad 14$$

$$P\Delta y = \frac{1}{2}\left(mv_i^2 - mv_f^2\right) \qquad 15$$

$$P\Delta y = -\left(\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2\right) \qquad 16$$

Mas $P\Delta y = -mg\Delta y = w$, dado pela Eq. 10, que é o trabalho realizado, assim:

$$-mg\Delta y = -\left(\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2\right) \qquad 17$$

$$w = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \qquad 18$$

Os passos até a Eq. 18 mostram que o trabalho realizado pela força peso depende apenas da massa e da mudança de velocidade. Não da velocidade em si, mas apenas da diferença entre elas. Isto não é coincidência. Esta é a chamada energia cinética, pois está relacionada justamente ao estado de movimento de um corpo.

A mudança da energia cinética, automaticamente implica que uma força agiu sobre este, alterando seu estado de movimento. Se a variação for nula, significa que não há forças agindo sobre o objeto ou que a resultante de todas é nula, justamente o que a Primeira e a Segunda Lei de Newton diz, mas em termos de energia.

O processo mostrado até a Eq. 18 pode também ser aplicado a sistemas como em um plano inclinado ou na Máquina de Atwood e os resultados serão os mesmos, onde este último pode ser visto também por Nussenzveig (2013, p.139).

Uma força resultante não nula agindo sobre um objeto implica numa aceleração, ao possuir aceleração este entra em movimento percorrendo uma certa distância, esta relação de distância e força chama-se trabalho. Devido a aceleração, este objeto muda sua velocidade constantemente. Para uma mesma força aplicada, quanto maior a massa do objeto mais difícil é de alterar sua velocidade, esta relação entre massa e velocidade, em termos de energia, é a energia cinética. O trabalho realizado converte-se em energia cinética, onde é dada por:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad 19$$

A energia cinética por si só não é tão importante. Sua variação sim. Se pensarmos na mudança de velocidade, pode-se então associar uma variação de energia cinética, ou seja:

$$\Delta K = K_f - K_i \quad 20$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \quad 21$$

5.2.2 Trabalho e Energia Cinética de uma Força Variável

Há uma forma melhor de se mostrar a relação entre trabalho e energia cinética, mesmo porque, como já foi discutido, nem todo objeto está sob ação de uma força constante, para isso calcula-se o trabalho a partir da integral da força pelo deslocamento:

$$w = \int_{r_i}^{r_f} F(r)dr \quad 22$$

Partimos do seguinte problema: Um objeto se desloca de uma posição x_i para uma posição x_f devido a influência de uma força resultante $F = ma$. Porém, mais fundamentalmente, a força é a derivada temporal do momento linear:

$$F = \frac{dp}{dt} \quad 23$$

O momento linear é dado por:

$$p = mv \quad 24$$

Assim, unido a Eq. 23 a Eq. 22, temos:

$$w = \int \frac{dp}{dt}dr \quad 25$$

Diferenciando a Eq. 24, tem-se:

$$dp = mdv \quad 26$$

Onde a massa ainda permanece constante. Também temos que a velocidade é dada por:

$$\frac{dr}{dt} = v \quad 27$$

$$dr = vdt \quad 28$$

O que torna a Eq. 25 em:

$$w = \int \frac{mdv}{dt}vdt \quad 29$$

$$w = m\int vdv \quad 30$$

Se integrarmos de v_i a v_f, temos:

$$w = m\int_{v_i}^{v_f} vdv \quad 31$$

$$w = m\frac{v^2}{2}\Big|_{v_i}^{v_f} \quad 32$$

$$w = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}m_i^2 \quad 33$$

$$w = \Delta K \quad 34$$

Ou ainda, para uma força constante:

$$F\Delta r = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}m_i^2 \quad 35$$

A dedução da Eq. 22 a Eq. 35 foi baseada em analogia com a realizada por Yong e Freedman (2016, p. 205). Da Eq. 35, tem-se algo muito importante: o trabalho realizado é igual a variação da energia cinética, porém esta não depende da natureza da força aplicada, desde que ela esteja associada ao deslocamento do objeto. Esta importante interpretação será melhor desenvolvia mais adiante, quando for tratado de forças não-conservativas. Esta relação também possui o nome de teorema do trabalho-energia (YOUNG; FREEDMAN, 2016, p. 197).

5.3 Energia Potencial

Ao pensar em um objeto no alto de uma rampa, como mostrado na Figura 5, em um plano inclinado que faz um ângulo θ com a horizontal e desconsiderando o atrito, a componente da força peso que é paralela ao deslocamento realiza trabalho sobre o objeto, no entanto, se o comprimento da rampa for alterado, mas sem alterar a sua altura, experimentalmente, percebe-se que o objeto chega ao final da rampa sempre com a mesma velocidade (NUSSENZVEIG, 2013, p. 138). Por que? Isto é o que será discutido.

No topo de uma rampa, o objeto está em iminência de entrar em movimento, pois há uma força agindo sobre ele, tal força realizará trabalho sobre o objeto e assim aumentará sua energia cinética até que chegue ao final da rampa (depois disto não há forças agindo a favor nem contra o movimento, assim, o objeto manterá o movimento retilíneo uniforme). Podemos imaginar que no instante do início do movimento o objeto possuiria uma energia “acumulada”, pronta para ser utilizada; pensemos em um sistema isolado um pouco diferente, uma montanha russa.

Um carrinho de montanha russa, estando a determinada velocidade, deve possuir energia cinética suficiente para que suba até o topo do trilho, tem-se que a força gravitacional está causando uma “resistência” ao movimento do carrinho, desacelerando-o, realizando trabalho negativo sobre o carrinho. Chegando ao topo, o carrinho tem sua velocidade reduzida a zero e neste instante está em iminência de movimento. Este trabalho a ser realizado, pronto para se transformar em energia cinética durante a iminência de alteração do movimento, é chamado de energia potencial (ANNA; MARTINI; *et al*, 2010, p. 387).

Isto significa que, na iminência do movimento, o objeto possui uma certa energia que está "virtualmente" acumulada, que será gasta conforme a força realiza trabalho e a energia cinética aumenta. O aumento da energia cinética ou a realização de trabalho representa um decréscimo na energia potencial e vice-versa. No caso da montanha russa, para cada ponto do trilho tem-se uma energia potencial associada, ou seja, há uma energia "pronta para ser usada" ou "recebida". Ter em mente a mudança de energia potencial entre um ponto e outro nos dá uma ideia de como a força realizou trabalho e como a energia cinética se alterou.

Saber da energia potencial em um ponto fornece uma informação vaga sobre como o sistema se sucederia, mas saber a variação entre dois pontos é extremamente útil, assim como a energia cinética.

Como dito, um a variação na energia cinética representa uma variação oposta da energia potencial. Como a variação da energia cinética é igual ao trabalho realizado, podemos associar isto com a energia potencial. A variação da energia potencial pode ser representada como:

$$w = \Delta K = -\Delta U = -(U_f - U_i) \qquad 36$$

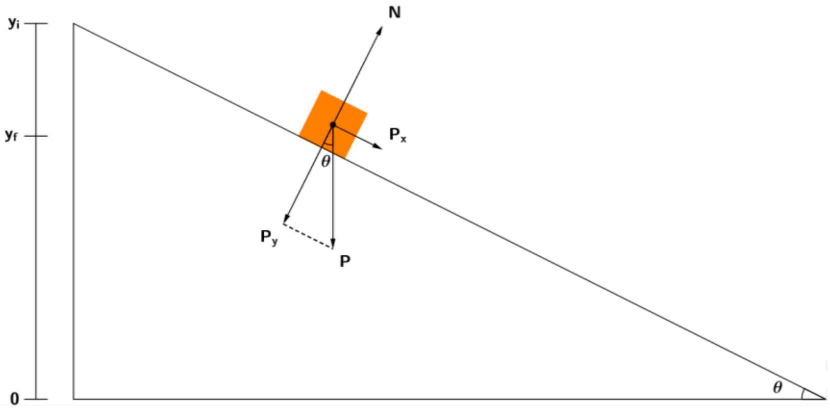
O trabalho realizado é igual ao negativo da variação da energia potencial, assim como a variação da energia cinética, já que pela Eq. 34 e pela Eq. 36, temos:

$$\Delta K = -\Delta U \qquad 37$$

A variação da energia cinética é também igual ao negativo da variação da energia potencial (ALONSO; FINN, 2012, p. 141).

Voltando para situação de um objeto no alto de uma rampa, sendo representada pela Figura 5.

Figura 5 – Objeto descendo uma rampa.



Fonte: Elaborada pelo autor com o Software Geogebra, 2022.

O objeto estando inicialmente em uma altura y_i, desce a rampa até uma altura y_f, percorrendo uma distância d ao longo da rampa. O trabalho é calculado por:

$$w = p_x d \tag{38}$$

$$w = mgsin(\theta)d \tag{39}$$

Pois $p_x = mgsin(\theta)$. Como $\sin(\theta)d = y_i - y_f$

$$w = -mg(y_f - y_i) \tag{40}$$

E como pela Eq. 36:

$$\Delta U = mg\Delta y,\ \Delta y = y_f - y_i \tag{41}$$

Para uma força constante como a gravitacional, vale a Eq. 41. Porém, como já foi discutido, nem sempre as forças são constantes ao longo do deslocamento e para este tipo de força o tratamento para encontrar a variação de energia potencial é análogo a aquele para encontrar o trabalho.

Da mesma forma que um infinitesimal de trabalho implica num infinitesimal de deslocamento:

$$dw = Fdr \tag{42}$$

O mesmo raciocínio se aplica a um infinitesimal de energia potencial:

$$dw = -dU \qquad 43$$

Juntando a Eq. 42 com a Eq. 43, tem-se:

$$dU = -Fdr \qquad 44$$

Ao integrarmos ambos os membros da igualdade, fazendo uma mudança de potencial de U_i até U_f referente a um deslocamento da posição r_i até a r_f:

$$\int_{U_i}^{U_f} dU = -\int_{r_i}^{r_f} F(r)dr \qquad 45$$

$$U_f = U_i - \int_{r_i}^{r_f} F(r)dr \qquad 46$$

Colocando o potencial inicial como um nível referencial, sendo igual a zero, $U_i = 0$, até um potencial final, $U_f = U$, temos:

$$U = -\int_{r_i}^{r_f} F(r)dr \qquad 47$$

O que de forma geral, é a operação para se encontrar a variação da energia potencial referente a uma força que depende apenas do deslocamento.

5.4 Energia Mecânica e Conservação de Energia

Foi discutido que quando uma força realiza trabalho sobre um corpo, este tende a mudar seu estado de movimento, implicando em um acréscimo ou decréscimo da energia cinética, que por sua vez corresponde a um negativo da variação da energia potencial. A mudança na quantidade de um corresponde a uma mudança igual para o outro.

Se partirmos da Eq. 37, abrindo e rearranjando os termos:

$$K_f - K_i = -(\Delta U_f - \Delta U_i) \qquad 48$$

$$K_f - K_i = U_i - U_f \qquad 49$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f \qquad 50$$

A soma dos valores da energia cinética e energia potencial, em quaisquer posições, é sempre o mesmo (HALLIDAY; RENICK, 2015, p. 179). Isto caracteriza uma grandeza que se conserva continuamente ao longo do movimento, esta grandeza chama-se energia mecânica e é definida como:

$$E = K + U \tag{51}$$

Pela Eq. 50, pode-se associar um valor de energia mecânica inicial e energia mecânica final, onde se torna:

$$E_i = E_f \tag{52}$$

Assim como a energia cinética e a energia potencial, a energia mecânica é mais útil em termos de sua variação, ou seja:

$$\Delta E = E_f - E_i \tag{53}$$

Mas isto implica, pela Eq. 52 e Eq. 53, que:

$$\Delta E = 0 \tag{54}$$

Um sistema que segue esse princípio, de variação de energia mecânica ser igual a zero, é dito ser um sistema conservativo e para que o sistema seja conservativo, pelo menos na maioria dos sistemas, as forças atuando sobre ele devem ser forças conservativas (HALLIDAY; RENICK, 2015, p. 179).

5.5 Força e Energia potencial

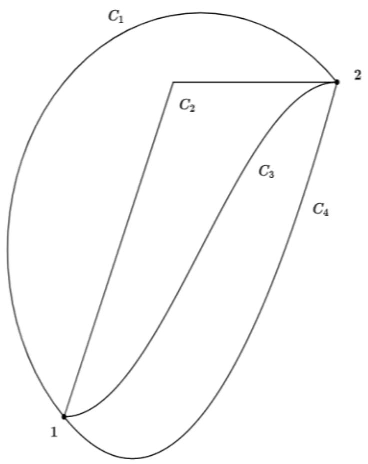
Ao tratar de forças conservativas deve-se observar alguns fatores. A conservação de energia é um deles. Para uma força conservativa a variação da energia mecânica é nula em qualquer deslocamento entre duas posições, sendo assim dependente somente destas posições e não do trajeto realizado pela partícula entre essas posições (NUSSENZVEIG, 2013, p. 167). Sendo assim, o trabalho w realizado por uma força $F = F(r)$, saindo da posição 1 até 2, ao longo de um caminho C é dado por:

$$w_{C:\,1\to 2} = \int_1^2 F(r)dr \tag{55}$$

Sabendo que a energia mecânica depende da energia cinética e da energia potencial, duas grandezas que, demonstradas anteriormente, não dependem do caminho percorrido e sim apenas de seus valores final e inicial, sendo a velocidade para energia cinética e posição para a energia potencial. Assim, se pensarmos em uma partícula que parte de uma posição inicial 1 com velocidade inicial v_1, e percorre um determinado caminho até chegar em uma posição final 2 com velocidade final v_2, a força é conservativa se o trabalho realizado por ela sobre a partícula for sempre o mesmo independentemente da trajetória, o que implica na correspondente mesma variação de energia cinética.

A figura abaixo esquematiza o que foi dito, para uma força conservativa, o trabalho realizado é independente da trajetória.

Figura 6: Esquema de trajetórias diferentes



Fonte: Elaborada pelo autor com o Software Geogebra, 2022.

Ou ainda, baseado na Figura 6, a relação entre os trabalhos realizados entre 1 e 2, percorrendo os caminhos C_1, C_2, C_3 e C_4:

$$w_{C_1} = w_{C_2} = w_{C_3} = w_{C_4} \tag{56}$$

Esta relação entre trabalho e forças conservativas pode ser ainda discutida de outra forma. Se a variação de energia mecânica é nula, então a soma das variações da energia cinética, está sendo igual ao trabalho realizado, e da variação de energia potencial possuem sinais opostos, como discutido em tópicos anteriores. O que se pode discutir é que como o trabalho depende do deslocamento e a energia cinética da velocidade, essas grandezas dependem de valores que na maioria das vezes não são mensuráveis ou que exigem um cálculo maior, porém, a energia potencial não. Esta depende apenas, pelo menos para forças conservativas, da mudança de posição, pois é uma energia que diz sobre como o sistema se sucederá, pois, é a diferença entre dois valores. Se soubermos da energia potencial do sistema, sabemos como ele pode se desenvolver, ou ainda, o que deu início ao movimento e com isso mensurar os outros valores de energia seja cinética ou o trabalho realizado.

Assim como se pode calcular a energia potencial a partir da força, pode-se encontrar a força que atua no sistema sabendo-se o tipo de energia potencial a que o objeto está submetido. Se pensarmos em um objeto se move em uma trajetória qualquer, segundo um infinitesimal de deslocamento, onde a força pode se dizer aproximadamente constante, temos um infinitesimal de trabalho realizado e por sua vez um de energia potencial, 45, assim:

$$dU = -Fdr \qquad 57$$

Que é justamente a Eq. 44, porém, se rearranjando os termos:

$$F = -\frac{dU}{dr} \qquad 58$$

A Eq. 58, mostra que podemos encontrar a força que está atuando no sistema a partir da energia potencial a qual está submetido, sendo igual ao negativo da taxa de variação da energia potencial com relação ao deslocamento realizado (ALONSO; FINN, 2012, p. 139).

Podemos ainda estender esse raciocínio para forças mais gerais, em duas ou três dimensões, no caso de uma partícula que se move devido a ação de uma força $\vec{F} = \vec{F}(r)$ e percorre trajetória em uma curva C entre dois pontos 1 e 2, definida pela função vetorial $\vec{r} = \vec{r}(t)$, o trabalho realizado sobre a partícula é definido como:

$$w_{c:1\to 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad 59$$

Se estamos falando de uma força conservativa, vale a seguinte relação:

$$w_{c:1\to 2} = -\Delta U = -(U_2 - U_1) \qquad \text{Eq. } 60$$

O que implica em:

$$\Delta U = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad 61$$

Se a trajetória da partícula for definida pela função vetorial $\vec{r} = \vec{r}\big(x(t); y(t); z(t)\big)$, então a sua derivada e sua diferencial com relação a *t* é, respectivamente (STEWART; 2013, p. 763):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}; \frac{dy(t)}{dt}; \frac{dz(t)}{dt}\right) \qquad 62$$

$$d\vec{r} = \left(\frac{dx(t)}{dt}; \frac{dy(t)}{dt}; \frac{dz(t)}{dt}\right) dt \qquad 63$$

E sendo a força definida como $\vec{F} = \left(F_x; F_y; F_z\right)$, um infinitesimal de energia potencial é:

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad 64$$

$$dU = -\left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt}\right) dt \qquad 65$$

$$dU = -\left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) \qquad 66$$

Se utilizarmos o conceito de aproximação diferencial, veremos que:

$$dU = -\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right) \qquad 67$$

Disto notamos uma coisa, que em geral, uma força conservativa é definida por uma função vetorial cujas componentes são as derivadas parciais de uma função escalar. Este tipo de função vetorial se chama gradiente da função e é representada por:

$$\vec{f} = grad\ F \qquad 68$$

Ou ainda de outra forma:

$$\vec{f} = \nabla \cdot F \qquad 69$$

Onde o operador chamado nabla, ∇, é definido, em coordenadas ortogonais, por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \qquad 70$$

Dito isto, e baseado no que foi apresentado, uma força conservativa pode ser escrita como:

$$\vec{F} = -\nabla \cdot U \qquad 71$$

Onde a dedução até a Eq. 71, é retirada de forma análoga a encontrada em Nussenzveig (2013, p. 171).

5.6 Considerações sobre Gradiente e Forças Conservativas

A ideia por trás das forças conservativas gira em torno do conceito de gradiente, que recorrentemente surge na física, porém, existem diversas formas de trata-la. No Cálculo podemos partir de uma definição mais clara sobre o que seria o gradiente de uma função, o que por consequência nos levaria a compreender melhor o significado físico de fenômenos associados a ele.

Um gradiente é um vetor que relaciona as taxas de variação de uma grandeza com sua respectiva variação em determinada direção, porém além disso, é possível trabalhar com variações em qualquer direção que desejarmos, assim, pode-se imaginar a ideia de força como sendo relacionada a uma certa direção a qual a energia potencial varia mais rápido.

5.6.1 Derivadas direcionais

Muitas vezes lidamos com funções que dependem de mais de uma grandeza, ou seja, possuem mais de uma variável independente, as quais chamamos de funções de várias variáveis. Nesses tipos de função, geralmente faz-se a derivada com relação a apenas uma das variáveis por vez, sendo denominada de derivada parcial, podendo possuir significados distintos dependendo da variável com a qual a derivada parcial é feita (STEWART; 2013, p. 814).

Podemos utilizar um exemplo da Termodinâmica: se $U = U(S, V, N)$ for a equação fundamental de um fluido puro (um gás ideal, por exemplo) na representação da energia interna, as derivadas parciais com relação a S, V e N, estes últimos sendo a entropia, volume e o número de partículas, respectivamente, são:

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} \tag{72}$$

$$p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N} \tag{73}$$

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V} \tag{74}$$

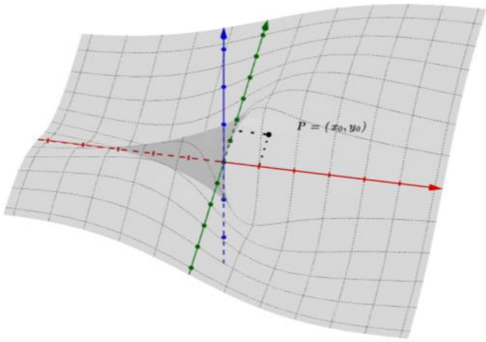
As três derivadas parciais de $U = U(S, V, N)$ são T, p e μ sendo, respectivamente, a temperatura, a pressão e o potencial químico (SALINAS; 2018, p. 64). Cada uma apresenta características e propriedades muito importantes do sistema; uma delas diz que se conhecermos pelo menos duas delas, pode-se obter a equação de estado original (SALINAS, 2013). Aqui temos uma função de três variáveis, onde para representa-la graficamente precisar-se-ia de uma "quarta coordenada" nos eixos ortogonais, no entanto, vamos analisar um caso apenas para duas variáveis.

Vamos supor uma função $H = H(x, y)$ que nos dá a altura de um relevo, como pode ser representada na Figura 7 abaixo. Para cada ponto $P = (x_0, y_0)$ na base do relevo, temos uma correspondente altura. Se utilizarmos os princípios de derivadas parciais, a relação definida por:

$$H_x = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_y \tag{75}$$

$$H_y = \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_x \tag{76}$$

Figura 7 – Representação de uma superfície simulando um relevo e um ponto P sob o plano XY

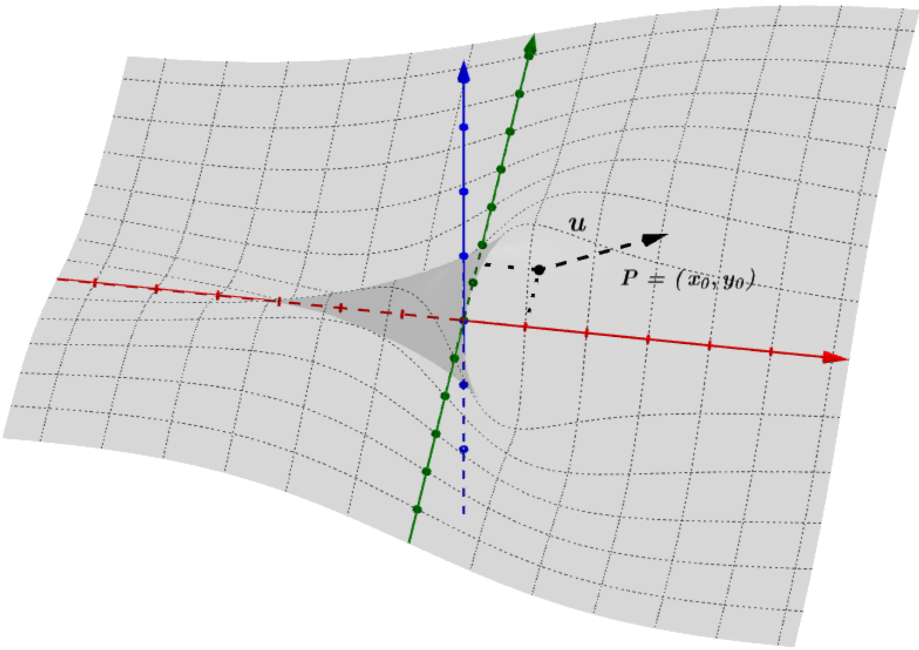


Fonte: Elaborada pelo autor com o Software Geogebra, 2022.

As equações Eq. 75 e Eq. 76, seriam as taxas com as quais o relevo varia a sua altura na direção do eixo X e no eixo Y, respectivamente. Apesar de serem exemplos interessantes para exemplificar a ideia de derivada parcial, isso nos limita a apenas duas direções. Se estivermos em qualquer ponto de uma montanha ou um morro, por exemplo, podemos ir para qualquer direção, não só as Norte, Sul, Leste e Oeste. Existem direções intermediarias, por exemplo: a direção em que o morro é mais íngreme é a 30° na direção Norte-Nordeste. Assim sabemos que por se tratar de um relevo temos lugares mais altos e outros mais baixos, mas e se quisermos saber para onde o relevo mais se inclina? Se estivermos em qualquer ponto desta região, para qual direção o relevo cresce ou diminui mais? Para isto, utilizamos as chamadas derivadas direcionais (STEWART; 2013, p. 839).

Para entendermos melhor voltemos no exemplo do relevo: Se quisermos saber a taxa de variação da altura em um determinado ponto do relevo na direção de X ou na direção de Y, basta fazer as derivadas parciais, mas e se quisermos saber a variação em qualquer outra direção? Para isto podemos associar em um terminado ponto no domínio (x, y) um vetor unitário que aponta na direção desejada, u, como mostrado na Figura 8:

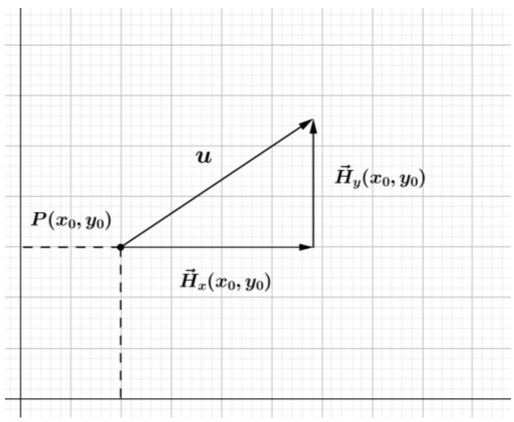
Figura 8 – Representação de um vetor *u* sobre P.



Fonte: Elaborada pelo autor com o Software Geogebra, 2022.

Se H_x e H_y fornecem as taxas de variação da altura H do relevo nas direções X e Y, então podemos dizer que essas variações acontecem ao longo de um eixo orientado, onde podemos associar a variação no eixo X e no eixo Y como um produto escalar, de acordo com a Eq. 77 e Eq. 78, como mostra a Figura 9, na planificação da Figura 8:

Figura 9 – Planificação da Figura 8.



Fonte: Elaborada pelo autor com o Software Geogebra, 2022.

$$(H_x\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}) \cdot (1\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}) = H_x \qquad 77$$

$$(0\hat{\imath} + H_y\hat{\jmath}) \cdot (0\hat{\imath} + 1\hat{\jmath}) = H_y \qquad 78$$

Agora, pensando em um determinado ponto do relevo, podemos associar nas regiões próximas daquele ponto uma variação total de altura, que fica melhor conforme a região for menor, o que nos leva ao conceito de diferencial linear (DEMIDOVITCH, 2016, p. 193), onde para o caso do relevo:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy \qquad 79$$

Se pensarmos no conceito de diferencial como um produto escalar, pode-se escreve a Eq. 79 como:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}\right) \cdot (dx, dy) \qquad 80$$

Se o termo (dx, dy) representar o diferencial de uma função vetorial, sendo $d\vec{r} = (dx, dy)$, assim tornando a Eq. 80 em:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}\right) \cdot d\vec{r} \qquad 81$$

Se $d\vec{r}$ for representado como $d\vec{r} = dr\widehat{r'}$, onde $\widehat{r'}$ é o vetor tangente unitário, onde $\vec{r} = \vec{r}(t)$ é a equação de uma reta no plano XY do sistema XYZ. Assim temos:

$$\vec{r} = (x_0, y_0) + (a, b)t \qquad 82$$

No caso de uma reta, o vetor tangente unitário coincide com a direção da reta, assim a Eq. 81 se torna:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}\right) \cdot dr\widehat{r'} \qquad 83$$

$$\frac{dH}{dr} = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}\right) \cdot \widehat{r'} \qquad 84$$

O vetor tangente unitário pode ser escrito como:

$$\widehat{r'} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad 85$$

Como a função $\vec{r} = \vec{r}(t)$ é justamente uma reta, a sua derivada torna-se:

$$r' = (a, b) \qquad 86$$

Assim, o vetor tangente unitário tona-se:

$$\widehat{r'} = \frac{(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad 87$$

Se $\vec{r} = \vec{r}(t)$ for uma reta com vetor diretor qualquer, então a taxa de variação da função $H = H(x, y)$ ocorre ao longo do plano perpendicular ao plano XY que contém a reta $\vec{r} = \vec{r}(t)$, na mesma direção desta, segundo o sentido de seu vetor diretor unitário. Se chamarmos a Eq. 87 de u e o termo $\frac{dH}{dr} = DH(x, y)$, podemos reescrever a Eq. 84 como:

$$DH(x, y) = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}\right) \cdot u \qquad 88$$

O que caracteriza aquilo que chamamos de derivada direcional, onde $DH(x, y)$ é a derivada direcional da função $H = H(x, y)$ na direção do vetor u unitário.

A derivada direcional é o produto escalar do vetor cujas coordenas são as derivadas parciais em *x* e *y*, respectivamente, pelo vetor unitário que aponta numa região especificada por u. Se agora tratarmos de uma função $f = f(x, y)$ continua e com derivadas parciais também continuas, podemos simbolizar a derivada direcional como sendo:

$$Df(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot u \qquad 89$$

O termo vetorial cujas componentes são as derivadas parciais de uma certa função escalar *f* são tão recorrentes que possuem uma notação própria, chamada de *grad f*, ou seja, o gradiente da função *f* é escrito como:

$$\nabla f = grad\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad 90$$

Levando isto a Eq. 89, podemos definir a notação de derivada direcional (STEWART; 2013, p. 843), como:

$$Df(x, y) = \nabla f \cdot u \qquad 91$$

Voltando ao problema do relevo, em um ponto qualquer do relevo teríamos várias direções diferentes, das quais existem diferentes valores de derivadas, mas e se quisermos saber para qual direção a derivada é máxima? Qual direção o relevo fica mais alto ou mais baixo mais rapidamente?

Para sabermos para qual direção a derivada direcional é máxima, utiliza-se o desenvolvimento do produto escalar, ou seja:

$$|Df(x, y)| = |\nabla f||u| \cos(\theta) \qquad 92$$

Assim, como u é unitário seu módulo é igual a um, o produto escalar é máximo quando o $\cos(\theta)$ é máxima, ou seja, quando $\theta = 0$ e assim, $\cos(\theta) = 1$, o que torna:

$$D_{máx} f(x, y) = |\nabla f| \qquad 93$$

A derivada direcional máxima é igual o módulo do vetor gradiente (STEWART, 2013, p. 844). Desta forma, a direção em que o relevo cresce, ou decresce, mais rapidamente é a direção do vetor gradiente e a taxa máxima é o módulo do vetor gradiente.

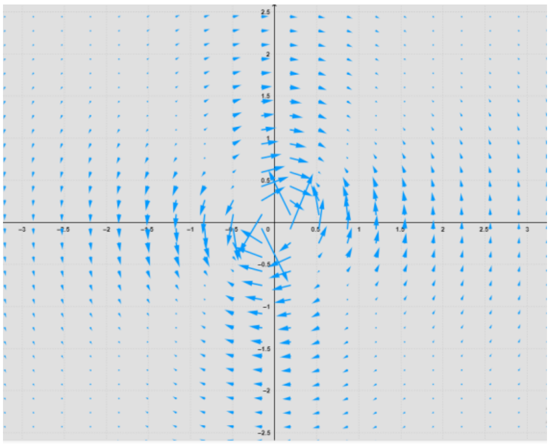
Ainda podemos levar isto para funções de mais de duas variáveis. Se a função f possuir mais de duas variáveis, ou seja, $f = f(x, y, z)$, por exemplo, temos:

$$grad\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \qquad 94$$

Uma função vetorial pode ser representada por um campo vetorial, o gradiente de uma função escalar *f* também pode ser escrito da mesma forma, ou seja, podemos criar um campo vetorial a partir do gradiente de uma função *f*.

Um exemplo, seria o campo gradiente formado pela variação do relevo na Figura 8, sendo representado no plano por:

Figura 10: Representação da variação da altura do relevo conforme certas direções. As regiões onde os vetores são maiores significa o local onde a altura varia mais.



Fonte: https://www.geogebra.org/m/cXgNb58T

Este tipo de campo vetorial possui propriedades bastante importantes, uma delas seria: Seja uma função $f = f(x, y, z)$ e o seu gradiente definido como a função vetorial $\vec{F} = \nabla f$, e uma curva fechada C definida por $\vec{r} = \vec{r}(t)$, temos a seguinte propriedade:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \qquad 95$$

Ou seja, a integral de linha de $\vec{F}$ em torno de uma curva fechada C é igual a zero. Um campo vetorial com esta propriedade, campo que foi obtido a partir do gradiente de uma função escalar é dito conservativo (NUSSENZVEIG; 2013, p. 168).

5.6.2 Campos Conservativos

Voltemos a definição de trabalho realizado por uma força. O trabalho realizado pode ser calculado por:

$$w_{c:1\rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad 96$$

Que é a equação escrita anteriormente, a Eq. 59. Posteriormente foi visto que uma força dita conservativa pode ser escrita como o gradiente de energia potencial. Assim, a Eq. 96 torna-se, a partir da Eq. 71:

$$w_{c:1\rightarrow 2} = -\int_1^2 \nabla \cdot U \cdot d\vec{r} \qquad 97$$

Expandindo o termo $\nabla \cdot U \cdot d\vec{r}$ t, temos por:

$$\nabla \cdot U \cdot d\vec{r} = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \qquad 98$$

Que é justamente a definição de diferencial da função (TAYLOR; p. 114), $U = U(x, y, z)$:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \qquad 99$$

E assim a Eq. 97 torna-se:

$$w_{c:1\to2} = -\int_{U_1}^{U_2} \mathrm{dU} = -\Delta U \qquad 100$$

O que mais uma vez implica que a variação da energia potencial “não depende” da trajetória percorrida pelo corpo, apenas da sua mudança de posição. Isto significa que para cada ponto do espaço temos um valor de energia potencial associado. Se uma partícula sai de um ponto A para um ponto B, então o trabalho realizado é o negativo da variação da energia potencial, e não depende do caminho intermediário entre A e B.

Uma situação muito importante a se considerar é a de uma partícula que ao sair de um determinado ponto, percorrendo uma trajetória qualquer, retorna ao ponto inicial. Se a variação de energia potencial depende apenas da posição, logo, a variação de energia potencial nesse caso é zero e por consequência o trabalho realizado também. Isto significa que a Eq. 96, para este caso é:

$$w_c = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \qquad 101$$

O termo C quer dizer que a integral de linha é realizada sobre uma curva fecha C, já que esta, parte de um determinado ponto e retorna a ele, segundo a curva C.

Integrais de linha realizadas em torno de uma curva fechada são bastante especiais. Surgem muitas vezes na física e em outras áreas. Seja uma função vetorial $\vec{f}$ realizada sobre uma curva fechada C, definida por $r = r(t)$, representa-se a integral de linha sobre uma curva fechada por:

$$F = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r} \qquad 102$$

Partindo disto, a Eq. 101 torna-se:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \qquad 103$$

Que vale somente quando a força $\vec{F}$ puder ser escrita como um negativo do gradiente de energia potencial, como é na Eq. 71.

Aqui podemos fazer algumas inferências sobre o conceito de campos conservativos em cálculo e em física. A partir dos conceitos básicos do cálculo vetorial, sabe-se que um campo dito conservativo tem as seguintes propriedades:

$$\vec{F} = \nabla \cdot f \tag{104}$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \tag{105}$$

Ou seja, se a função vetorial $\vec{F}$ for resultado de um gradiente de certa função escalar f, então a integral circular (integral de linha sob um caminho fechado) é nula. No entanto, o inverso não necessariamente é verdade, se a integral circular de uma função vetorial for zero para certa curva, não necessariamente significa que ela possa ser escrita como gradiente de uma função f .

O conceito de campos conservativos se aplica justamente ao que foi deduzido para forças. Uma força é dita conservativa quando puder ser escrita por um gradiente de uma função escalar, que aqui é a função energia potencial. Assim, uma força é conservativa quando a Eq. 71 e a Eq. 103 forem satisfeitas.

5.7 Forças não conservativas

Até o momento foram estudados os aspectos e fundamentos das forças conservativas. Este tipo de força está relacionado ao deslocamento da partícula e a um campo escalar cujo gradiente forneceria a própria força tratada. No entanto, nem toda força dependente do deslocamento é conservativa, justamente por não poder ser escrita como um gradiente de uma função escalar.

Tais forças que não podem ser definidas em termos de gradiente, ou que de certa forma não sugerem uma força "real" são denominadas de não conservativas, não no sentido de que a energia se perderia, mas no sentido de que os processos por trás delas seriam ditos como "irreversíveis".

5.7.1 Força de atrito

Um dos exemplos de força não conservativa mais básicos é a força de atrito. Quando um objeto é empurrado a partir da ação de uma força externa, é necessário um certo esforço mínimo para que o objeto comece a se movimentar. A partir do instante em que o objeto começa a se movimentar, a força necessária para mantê-lo em movimento diminui, porém deve ser mantida constante, equilibrando-se com a força de atrito, para que o corpo no mínimo continue em movimento retilíneo uniforme.

Estar em movimento retilíneo uniforme, implica que a resultante entre a força que está sendo aplicada e a força que está agindo contra o sentido do movimento são nulas, neste caso, seria a força de atrito e esta é escrita como:

$$F_{at} = \mu N \tag{106}$$

Onde μ é chamado de coeficiente de atrito e N é a força normal a superfície em que se encontra o objeto.

Quanto ao μ, este pode ser o coeficiente de atrito estático ou cinético. A diferença entre esses está relacionada ao movimento do objeto. Um o corpo está sob influência de uma força, devido ao atrito com a superfície há uma resistência ao movimento, enquanto essa força for menor ou igual a força de atrito o objeto não se moverá e então μ é dito como coeficiente de atrito estático, μ_e. Quando a partir do instante que o objeto passa a se mover, a força necessária para mantê-lo em movimento é ligeiramente menor que a força anterior antes do movimento, ou seja, quando o objeto está em movimento sobre o efeito do atrito, a força que passa a impedir o movimento é relacionada ao coeficiente de atrito cinético, μ_c (HALLIDAY; RESNICK, 2015, p. 124).

Exemplificando o que foi dito, as forças de atrito estático e cinético são:

$$F_{at_e} = \mu_e N \tag{107}$$

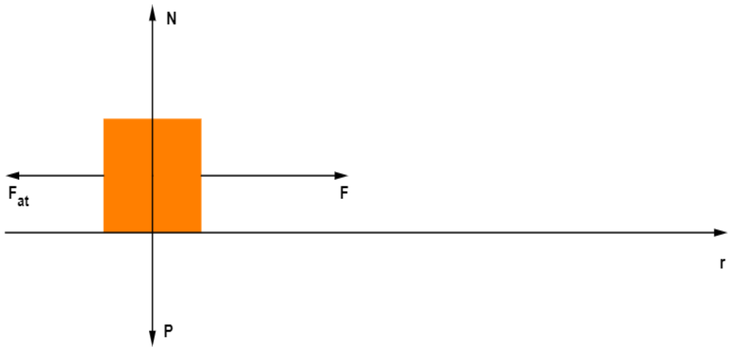
$$F_{at_c} = \mu_c N \tag{108}$$

Mas que relação há entre o atrito e forças não conservativas? O atrito é uma força dissipativa. A força de atrito, assim como outros tipos de força, também realiza trabalho, obedecendo aos princípios apresentados até então, ou seja, vale a equação Eq. 2. Aplicando a Eq. 2 no cálculo do trabalho realizado pela força de atrito temos:

$$w = \vec{F} \cdot \vec{r} = \vec{F}_{at} \cdot \vec{r} = F_{at} r cos(\theta) \tag{109}$$

A força de atrito, como foi falado, é uma força que se opõe ao sentido do movimento, como mostrado pela Figura 11 abaixo:

Figura 11 – Diagrama de forças sobre um objeto sendo puxado e sob efeito de uma força de atrito.



Fonte: Autor; Imagem feita no Geogebra; 2022

Juntando a Eq. 108 com a Eq. 109 e considerando o fato de que a força de atrito se opõe também ao sentido da força F representada, logo $\theta = \pi$, o que resulta em:

$$w_{at} = -\mu_c N r \quad 110$$

Se pensarmos em uma variação de deslocamento, Δr, a Eq. 110 se torna:

$$w_{at} = -\mu_c N \Delta r \quad 111$$

É possível ver aqui um fator importante. O sinal negativo. Este sinal representa o fato de que a força age no sentido oposto ao do deslocamento, e que esse “trabalho negativo” seria fruto de uma quantidade de energia que seria aos poucos “removida” do sistema. A força de atrito que realiza trabalho é a força de atrito cinético, já que a força de atrito estático só existe enquanto uma força age sobre o objeto e este ainda não está em movimento.

A força normal à superfície, N, neste caso para um plano horizontal, é igual ao peso, sendo definida por:

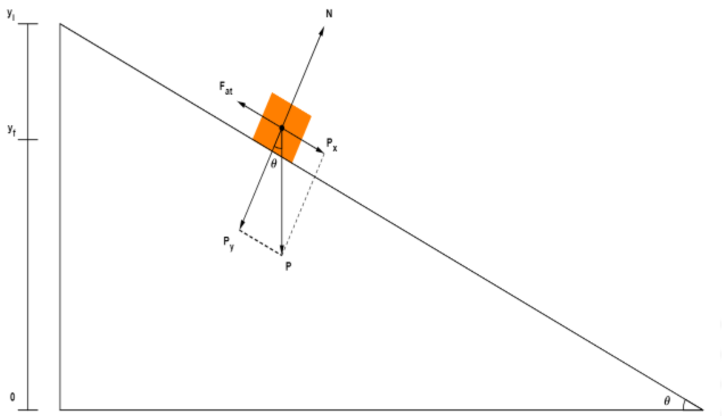
$$N = -P = mg \quad 112$$

Assim, com a Eq. 112 e a Eq. 111, temos:

$$w_{at} = -\mu_c m g \Delta r \quad 113$$

A força de atrito realiza trabalho, porém, como o objeto está em movimento, temos uma energia cinética associada a este corpo, definida pela Eq. 21, assim como a força F também realiza trabalho sobre o bloco da Figura 11, definida da mesma forma pela Eq. 1. Diversas formas de energia estão associadas ao sistema, porém para se ter um olhar mais amplo, verifiquemos a situação de um plano inclinado, como mostrado na Figura 12:

Figura 12 – Diagrama de forças de um objeto descendo livremente



Fonte: Autor; Imagem feita no Geogebra; 2022

Um corpo de massa m é liberado do repouso em um plano inclinado a partir de uma altura y_i até chegar em uma altura y_f. A variação da energia potencial gravitacional é definida por:

$$\Delta U = mg\Delta y;\ \Delta y = y_f - y_i \qquad 114$$

A variação da energia cinética é definida pela Eq. 21:

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \qquad 115$$

Assim, a energia mecânica é escrita como:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U \qquad 116$$

Porém, sabe-se que $\Delta K = w$, onde $w = F_R \Delta r$, sendo F_R a força resultante sobre o corpo, o que torna a Eq. 115:

$$\Delta K = F_R \Delta r \qquad 117$$

A força resultante sobre o bloco é dada por:

$$F_R = F_{at} + P_x \qquad 118$$

O que a torna:

$$F_R = \mu_c N + mgsen(\theta) \qquad 119$$

Porém:

$$N = -P_y = -mgcos(\theta) \qquad 120$$

Unindo a Eq. 120 à Eq. 119, temos:

$$F_R = [-\mu_c \cos(\theta) + \sin(\theta)]mg \qquad 121$$

Unindo com equação da energia mecânica temos:

$$\Delta E = [-\mu_c \cos(\theta) + \sin(\theta)]mg\Delta r + mg\Delta y \qquad 122$$
$$\Delta E = -\mu_c \cos(\theta)\, mg\Delta r + mgsin(\theta)\Delta r + mg\Delta y \qquad 123$$

Porém, $\sin(\theta)\,\Delta r = -\Delta y$ e unindo isto a Eq. 123, tem-se:

$$\Delta E = -\mu_c \cos(\theta)\, mg\Delta r \qquad 124$$

Que é justamente o trabalho realizado pela força de atrito:

$$\Delta E = w_{at} = F_{at}\Delta r \qquad 125$$

Esta conclusão gera consequências importantes. Isto mostra que o sistema mostrado na Figura 12 não é conservativo, pois a energia potencial não está sendo totalmente convertida em energia cinética. O que acontece é que parte da energia que iria se tornar em movimento é perdida na forma de atrito, o que depois de certo tempo levaria o corpo a parar completamente caso haja distância suficiente na rampa.

Essa energia perdida devido ao atrito, demonstra um exemplo prático de força não conservativa. A energia perdida na forma de atrito, na pratica se torna energia térmica, da mesma forma que em um tempo frio nós esfregamos as mãos uma contra a outra e o atrito entre elas gera calor, isto é o que ocorre durante o movimento de um objeto que desliza por uma rampa com atrito.

A condição para que o sistema fosse conservativo era a de que em todo momento durante o movimento a variação da energia mecânica fosse nula, mas como o atrito é uma força dissipava, essa energia não pode ser recuperada. Caso tentássemos fazer com que o bloco subisse de volta para o topo da rampa, enfrentaríamos a resistência do atrito e além do trabalho necessário para vencer a força gravitacional, ainda precisaríamos de energia extra para poder vencer o atrito, esta energia além da energia potencial é o que caracteriza um sistema não conservativo.

Mas porque a força de atrito não é conservativa? A força de atrito não é uma força dependente da posição. A força peso é a mesma ao longo do trajeto, o que pode mudar são suas componentes dependendo da inclinação da rampa, porém a força de atrito depende de outra força, uma força de vinculo, a força normal. A força normal é uma força de vinculo, ou seja, mantem o objeto sob a superfície, seguindo a trajetória, porém essa força não realiza trabalho e só influencia na direção do movimento e não no movimento em si, a mudança de velocidade, por exemplo.

Apesar de dizer que a força de atrito não é conservativa devido ao fato de depender de outra força, e de não depender do deslocamento, nem toda força que depende do deslocamento é conservativa, como será visto.

5.7.2 Forças dependentes do tempo e da velocidade

Em muitas situações na física nos deparamos com forças que não dependem somente da posição, dependendo de outras variáveis como uma outra força, no caso do atrito em um rampa, ou dependendo do tempo, como seria o caso e de uma força propulsora senoidal em um oscilador harmônico simples:

$$\vec{F}(t) = F_0 sen(\omega t)\hat{\imath} \qquad 126$$

Onde F_0 são amplitude da força e ω é a frequência angular. Outra força que também não depende da posição da partícula é a força de resistência do ar, sendo definida como:

$$\vec{F} = -av\hat{\imath} \tag{127}$$

Este é um caso mais "simples" de força de atrito, ou arrasto, onde a força depende apenas da velocidade e não de v^2 ou outra potência de v. O fator a é uma constante de proporcionalidade. A força de arrasto também pode ser escrita como:

$$F = \frac{1}{2}C\rho Av^2 \tag{128}$$

Mas o que essas forças tem em comum? Pensemos em um objeto que se move devido a ação da força definida pela Eq. 126. A equação da posição de uma partícula que se move ao longo do eixo dos X é dada por:

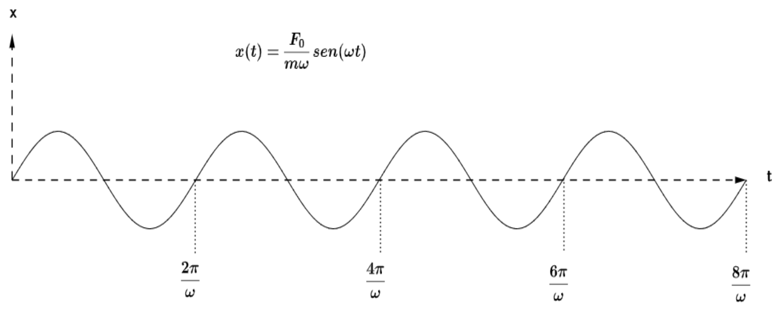
$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2}sen(\omega t) + C_1t + C_2 \tag{129}$$

Se partirmos do problema de valor inicial $x(0) = 0$ e $x'(0) = \frac{F_0}{m\omega}$, a Eq. 129 torna-se:

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2}sen(\omega t) \tag{130}$$

Devido ao caráter senoidal da posição, a partícula sempre retorna à posição inicial em intervalos de tempo de $\frac{2\pi n}{\omega}$, onde n é um número inteiro, ou seja, no intervalo do ciclo inicial de tempo, $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$, a partícula sai e depois retorna para a mesma posição, como mostra o gráfico da Figura 13:

Figura 13 – Movimento de uma partícula devido a uma força senoidal



Fonte: Autor; Imagem feita no Geogebra; 2022

Se calcularmos o trabalho realizado por uma partícula que atravessa o primeiro ciclo do movimento no intervalo $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$, teremos:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_0 sen(t)\frac{F_0}{m\omega}\cos(\omega t)\,dt \tag{130}$$

$$\frac{F_0^2}{2m\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(2\omega t)\,dt = -\frac{F_0^2}{2m\omega}\frac{\cos(2\omega t)}{2\omega}\bigg|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} =$$

$$= -\frac{F_0^2}{4m\omega^2}\cos(2\omega t)\big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 0 \qquad 131$$

Ou seja, o trabalho realizado sobre a partícula é zero. Mas há um algo a ser comentado, principalmente sobre no que se refere a integrais de linha em caminho fechado. Uma das principais características de uma força conservativa, além de o trabalho realizado em um caminho fechado ser nulo, é a de que a força possa ser escrita como sendo o gradiente da energia potencial e esta deve depender apenas da posição, ou seja, o que diz a Eq. 71.

Identificar qual seria o gradiente que resultaria da força apresentada é um pouco mais trabalhoso, mas pode-se supor que se a força é dependente do tempo, logo o seu gradiente também seria dependente do tempo, ou seja:

$$F(r,t) = -\nabla \cdot U(r,t) \qquad 132$$

Se a função de potencial é definida como:

$$U = U(r,t) \qquad 133$$

O diferencial da Eq. 133 é dado por:

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial r}dr + \frac{\partial U}{\partial t}dt \qquad 134$$

Se a trajetória é definida por uma função $r = r(x,y,z)$, a Eq. 133 torna-se:

$$dU = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz + \frac{\partial U}{\partial t}dt \qquad 135$$

Assim, tem-se:

$$dU = -\vec{F}(r)\cdot d\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t}dt \qquad 136$$

Diferenciando a Eq. 116 temos:

$$dE = dK + dU \qquad 137$$

Porém:

$$dK = dw = \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} \qquad 138$$

Unindo a Eq. 136 e Eq. 138 à Eq. 137, temos:

$$dE = \frac{\partial U}{\partial t} dt \qquad 139$$

A Eq. 139, mostra justamente outra característica de forças não conservativas. Algumas delas podem apresentar a característica de o trabalho em um caminho fechado ser nulo, porém não necessariamente significa que a variação da energia mecânica será nula. Na Eq. 139 é mostrada que a variação de energia mecânica depende da variação da energia potencial com relação ao tempo, o que, porém, vai contra a ideia de conservação de energia apresentada anteriormente. A dedução mostrada é encontrada por Taylor (TAYLOR, 2013, p. 122).

De forma geral, para uma força ser conservativa deve apresentar as seguintes características (TAYLOR, 2013, p. 111):

$$\vec{F} = \vec{F}(r) \qquad 140$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \qquad 141$$

$$\Delta E = 0 \qquad 142$$

Além de a força depender do deslocamento, a sua energia potencial também deve depender do deslocamento, ou seja, a força deve poder ser escrita como um gradiente de energia potencial, porém, nem sempre é fácil verificar se determinada força é conservativa ou não, pois mesmo algumas forças que são dependentes do deslocamento não necessariamente são conservativas. Para isso, utiliza-se de um novo princípio do cálculo vetorial, uma “ferramenta” que também é utilizada para verificar se determinada força ou campo vetorial é ou não conservativo, ou seja, se pode ou não ser escrito como o gradiente de alguma função escalar, essa “ferramenta” chama-se rotacional.

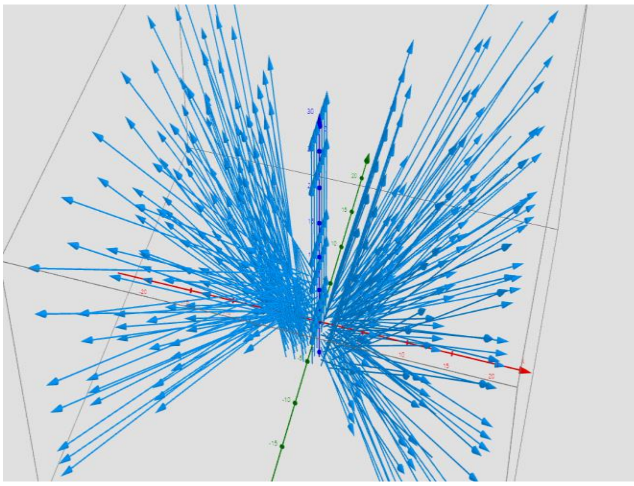
5.7.3 Considerações sobre o Gradiente e o Rotacional

Antes de tratarmos da definição de rotacional, devemos retornar a alguns conceitos relacionados a funções vetoriais. Uma função vetorial pode ser definida como:

$$\vec{f} = \vec{f}(x, y, z) \tag{143}$$

Ou seja, temos uma função que possui um domínio em $\mathbb{R}^3$ que associa a cada ponto de coordenadas (x, y, z) um vetor definido por $\vec{f}$. O gráfico formado por todos os vetores associados determina o que é chamado de campo vetorial. Um exemplo de campo vetorial, representando a função $\vec{f}(x, y, z) = (2x, xy, z^2)$, está na Figura 14:

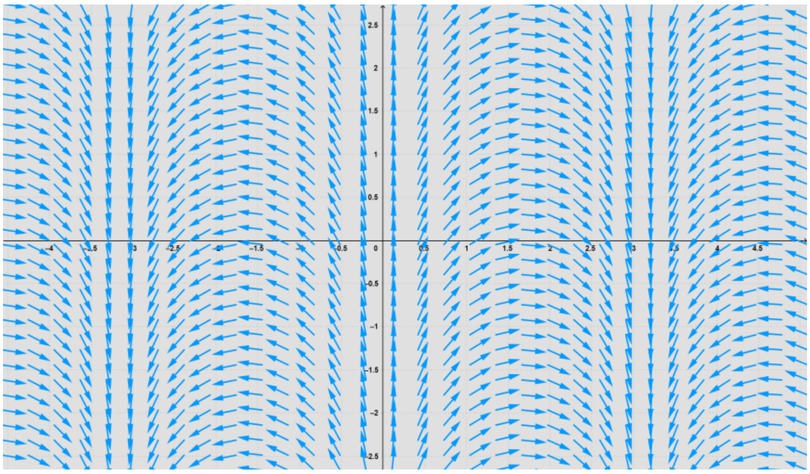
Figura 14 – Esquema de campo vetorial



Fonte: https://www.geogebra.org/m/KKB2Ndez

Pode-se ainda utilizar de um exemplo de campo vetorial representado no plano, ou seja, uma função vetorial $\vec{f} = \vec{f}(x, y)$, por exemplo o campo $\vec{f}(x, y) = (sen(x), \cos(x))$, como na Figura 15:

Figura 15 – Representação de um campo vetorial no plano

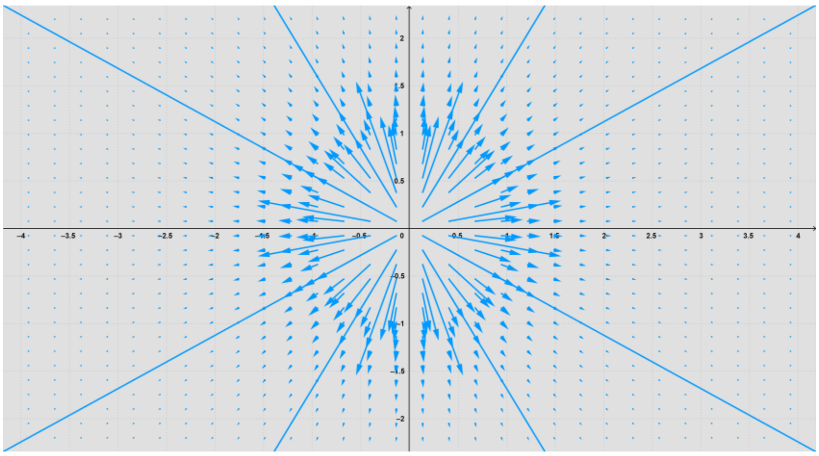


Fonte: https://www.geogebra.org/m/cXgNb58T

Essas representações de campos vetoriais podem significar diversas coisas, pode ser campos de velocidade de uma partícula, podem ser as zonas de atuação de uma força, pode ser a representação de um campo elétrico, magnético ou gravitacional. A Figura 16 representa o campo vetorial associado ao campo elétrico de uma partícula carregada, onde a sua representação matemática é dada por:

$$\vec{E}(x,y) = qk\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{144}$$

Figura 16 – Representação do campo elétrico no plano. Os vetores de maior comprimento representam uma maior intensidade do campo conforme se aproximam do centro.



Fonte: https://www.geogebra.org/m/cXgNb58T

Vamos pensar agora em uma função vetorial definida como $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$, como sendo o campo de velocidade de um fluido em escoamento. Se consideramos o campo como sendo um campo conservativo, o que isto significa para o caso do fluido? Pensando na ideia de integral de linha em um caminho fechado, para este caso, teríamos:

$$\oint_C \vec{v}(x, y, z) \cdot d\vec{r} = 0 \qquad 145$$

Pode-se partir do fato de que cada vetor velocidade do fluido só depende da posição em (x, y, z), ou seja, não há partes do fluido onde a velocidade varia com o tempo. Outro fato é o de que a velocidade pode ser escrita como o gradiente de alguma função $g(x, y, z)$, tal que:

$$\nabla \cdot g = \vec{v}(x, y, z) \qquad 146$$

Assim, $g = g(x, y, z)$, seria a superfície tal que o seu gradiente nos diria a direção com a qual seu valor varia com maior rapidez, o que resultaria na velocidade do fluido. Mas verificar diretamente qual seria essa função pode ser algo dispendioso, assim como verificar cada possível curva C que satisfaça a e Eq. 145. Para isto, podemos verificar um conjunto maior de curvas olhando para uma área específica do fluido determinada por uma superfície imaginária.

Se pensarmos em uma superfície qualquer que contenha a curva C que está sendo trabalhada, podemos separar a superfície em ainda mais curvas, fazendo com que:

$$\oint_C \vec{v}(x, y, z) \cdot d\vec{r} = \sum_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}} \oint_{C_i} \vec{v}(x, y, z) \cdot d\vec{r} \qquad 147$$

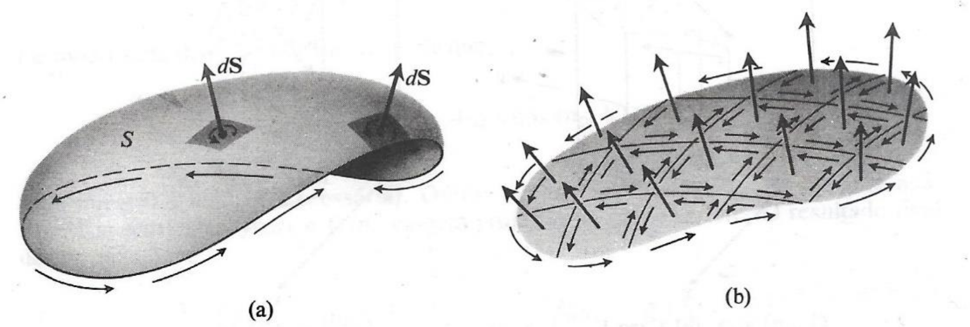
Esta definição parte de uma propriedade muito importante das integrais de linha em caminhos fechados, a de que uma curva fechada C pode ser dividida em i outras curvas também fechadas, e que a soma das integrais de linhas realizadas sobre todas as i curvas fechas será igual a integral de linha sobre C.

Podemos usar o termo “circulação” para definir uma integral de linha em caminho fechado sem se preocupar muito com seu significado real, ou seja, chamamos de circulação qualquer grandeza k definida a partir de uma integral da seguinte forma:

$$k = \oint \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{r} \qquad 148$$

Como a superfície escolhida foi dividida em várias seções de curvas fechadas, formando uma espécie de “mosaico”, como mostra a Figura 17, de pequenas regiões delimitadas por alguma curva C_i, podemos associar a cada região um valor de área definida por ΔS. Se unirmos isto com o que foi proposto na Eq. 147, podemos escrever uma forma equivalente para ela:

Figura 17 – Representação de uma superfície orientada dividida em diversas malhas de área ΔS, delimitadas por curvas C_i.



Fonte: BUTKOV (1983, p. 29)

$$\oint_C \vec{v}(x,y,z) \cdot d\vec{r} = \sum_i^n \frac{\oint_{C_i} \vec{v}(x,y,z) \cdot d\vec{r}}{\Delta S} \Delta S \qquad 149$$

Desta forma, o termo $\frac{\oint_{C_i} \vec{v}(x,y,z) \cdot d\vec{r}}{\Delta S}$, pode ser definido como “circulação por unidade de área”.

Se tomarmos a ideia de que a superfície foi dividia em inúmeras regiões definidas por curvas C_i e aumentarmos esse número de curvas até um valor extremamente alto, porém ainda finito, a área região de cada região torna-se cada vez menor, ou seja, $\Delta S \to 0$. Unido isso ao fato de que $\frac{\oint_{C_i} \vec{v}(x,y,z) \cdot d\vec{r}}{\Delta S}$ ainda é a divisão de um escalar k por um valor de ΔS, temos o seguinte:

$$\frac{\oint_{C_i} \vec{v}(x,y,z) \cdot d\vec{r}}{\Delta S} = f(x,y) \qquad 150$$

$$\oint_{C_i} \vec{v}(x,y,z) \cdot d\vec{r} = f(x,y)\Delta S \qquad 151$$

Se fizermos o somatório e o limite tendendo a zero:

$$\lim_{i\to\infty} \sum \oint_{C_i} \vec{v}(x,y,z) \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta S\to 0} \sum f(x,y)\Delta S \qquad 152$$

$$\oint_{C} \vec{v}(x,y,z) \cdot d\vec{r} = \iint f(x,y)dS \qquad 153$$

O resultado da Eq. 150 é uma função escalar e pela Eq. 153, temos uma integral dupla, pois o somatório é feio em cima de uma área, e função $f = f(x,y)$.

Pela Eq. 153 tem-se que a integral de linha sobre uma curva fechada C é igual a integral dupla da superfície definida pela função $f = f(x,y)$, porém, ainda não há nada que a relacione com $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$, para isto, voltamos a definição apresentada anteriormente na Eq. 149. É definida a função $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$ como sendo $\vec{v}(x,y,z) = (v_x, v_y, v_z)$ e $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, assim:

$$\oint_{C} \vec{v}(x,y,z) \cdot d\vec{r} = \sum_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}} \frac{\oint_{C_i}(v_x dx + v_y dy + v_z dz)}{\Delta S} \Delta S \qquad 154$$

Agora parte-se da seguinte ideia: Em um fluido cujo campo de velocidade é definido pela equação $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$, as componentes da velocidade em cada ponto do fluido serão determinadas por v_x, v_y e v_z, porém, a superfície contém inúmeros pontos definidos dentro de cada região determinada por uma curva C_i. Como cada componente também é uma função de (x,y,z), pode-se estabelecer aproximações para os valores das coordenadas da velocidade para pontos $P = (a,b,c)$ próximos de um ponto $Q = (x,y,z)$ que de fato pertencem a superfície.

Realizando a aproximação linear de v_x, v_y e v_z para um ponto (a,b,c) definido em torno de (x,y,z) tem-se:

$$(v_x)_Q = (v_x)_P + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_P (x-a) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_P (y-b) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_P (z-c) \qquad 155$$

O mesmo raciocínio vale para as outras coordenadas de $\vec{v}$:

$$\left(v_y\right)_Q = \left(v_y\right)_P + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_P (x-a) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_P (y-b) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_P (z-c) \qquad 156$$

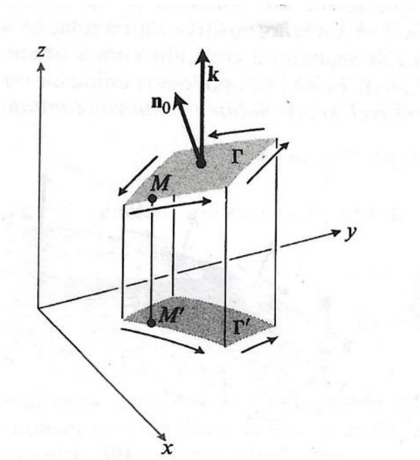
$$(v_z)_Q = (v_z)_P + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_P (x-a) + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)_P (y-b) + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_P (z-c) \qquad 157$$

Unindo as Eq. 155, Eq. 156 e Eq. 157 com a Eq. 154, utilizando as seguintes propriedades de integrais de linha em curvas fechadas:

$$\oint dx = \oint xdx = \oint dy = \oint ydy = \oint dz = \oint zdz = 0 \qquad 158$$

As integrais definidas como $\oint xdy, \oint ydx, \oint xdz, \oint zdx, \oint ydz \; e \oint zdy$, podem ser entendidas como as áreas da projeção de uma pequena região da superfície sobre os planos coordenados, e como cada área é uma superfície orientada definida por um vetor perpendicular a ela, logo a área projetada é aproximadamente a área definida pela região da superfície, como mostrado na Figura 18, sendo definida como pelas seguintes relações:

Figura 18 – Representação da projeção de uma malha da superfície S. A letra Γ representa uma certa malha, $\boldsymbol{n}_0$ é o vetor normal unitário. M' e Γ' são as projeções de M e Γ no plano cartesiano.



Fonte: BUTKOV (1983, p. 30)

$$\oint xdy = \Delta S \cos(\hat{n}_0, \hat{k}) \qquad 159$$

$$\oint ydx = -\Delta S \cos(\hat{n}_0, \hat{k}) \qquad 160$$

$$\oint xdz = -\Delta S \cos(\hat{n}_0, \hat{\jmath}) \qquad 161$$

$$\oint ydz = \Delta S \cos(\hat{n}_0, \hat{\imath}) \qquad 162$$

$$\oint zdx = \Delta S \cos(\hat{n}_0, \hat{\jmath}) \qquad 163$$

$$\oint zdy = -\Delta S \cos(\hat{n}_0, \hat{\imath}) \qquad 164$$

Aplicando na Eq. 154 as equações de Eq. 159 até a Eq. 164 junto das equações em Eq. 158 no desenvolvimento da equação das Eq. 155 a Eq. 157, e rearranjando os termos a Eq. 154 torna-se:

$$\frac{\oint_C \vec{v}(x,y,z)\cdot d\vec{r}}{\Delta S} = \sum_{i}^{n} \frac{\oint_{C_i}\left(v_x dx + v_y dy + v_z dz\right)}{\Delta S} =$$

$$= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_P \cos(\hat{n}_0, \hat{\imath}) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)_P \cos(\hat{n}_0, \hat{\jmath}) +$$

$$+ \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_P \cos\left(\hat{n}_0, \hat{k}\right) \qquad 165$$

O processo anterior para se chegar até aqui é trabalhoso, pois são muitas definições e conceitos utilizados ao mesmo tempo, porém, pode-se chegar a uma simplificação ainda melhor se tomarmos o limite em Eq. 165:

$$\lim_{\Delta S \to o} \frac{\oint_C \vec{v}(x,y,z)\cdot d\vec{r}}{\Delta S} =$$

$$= \left(\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_P \hat{\imath} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)_P \hat{\jmath} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_P \hat{k}\right) \cdot \hat{n}_0 \qquad 166$$

O primeiro termo entre parênteses chama-se rotacional de $\vec{v}$, e é definido como:

$$rot\ \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_P \hat{\imath} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)_P \hat{\jmath} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_P \hat{k} \qquad 167$$

Ou ainda, na sua forma de operador:

$$rot\ \vec{v} = \nabla \times \vec{v} \qquad 168$$

Onde o operador nabla, ∇, é definido pela Eq. 70. Também há a forma matricial para a representação do rotacional, sendo esta:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} \qquad 169$$

Dito isto, comparando a Eq. 168 com a Eq. 154, temos:

$$\oint_C \vec{v}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} \qquad 170$$

A dedução do conceito de rotacional e da Eq. 168, são encontradas e foram feitas a partir da dedução de Butkov, (BUTKOV, 1983, p. 30). Voltando ao problema relacionado a campos conservativos, para que o campo seja considerado de fato conservativo, além das definições até o momento apresentadas, partindo de que:

$$\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0 \qquad 171$$

Implica que também:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{f}) \cdot d\vec{S} = 0 \qquad 171$$

E disto se conclui que para que um campo vetorial seja considerado conservativo, a partir da Eq. 171 temos:

$$\nabla \times \vec{f} = 0 \qquad 172$$

Que é mostrado também em (TAYLOR, 2013, p. 119).

5.7.4 Discussão sobre Forças Conservativas, não Conservativas, Gradiente e Rotacional

Foram tratados diferentes aspectos relacionados a forças conservativas e não conservativas. Forças que dependem apenas do deslocamento e não do tempo, velocidade ou outra grandeza. Mesmo forças que dependem do deslocamento, nem todas são conservativas e isto pode ser verificado a partir de uma propriedade entre gradiente e rotacional, onde se um campo vetorial $\vec{F}$ pode ser escrita como $\vec{F} = \nabla \cdot f$, logo:

$$\nabla \times (\nabla \cdot f) = 0 \qquad 173$$

Um campo vetorial que obedece a Eq. 172 é chamado de irrotacional, mas o que isso quer dizer? Quer dizer que o campo não pode ser rotacionado, por exemplo, no caso do campo de velocidades de um fluido em escoamento, definido por $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$, não existem regiões onde há “redemoinhos” ou algum tipo de turbulência, algo que roube energia do sistema ou que altere demais o fluxo do fluido.

No caso de forças, como a gravitacional por exemplo, significa que se um corpo está sob influência de um planeta, a variação da energia potencial não se alteraria de forma repentina, levando a uma perda energética que iria além das do próprio sistema. A força magnética, por exemplo, definida com:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad 173$$

É uma força não conservativa, pois depende da velocidade com relação ao campo magnético e esta altera apenas a direção do movimento e não a sua velocidade de fato, tendo a propriedade de induzir em um circuito uma corrente elétrica. Outra força que também não é conservativa, pois além de ser uma força de vinculo, esta não realiza trabalho, pois altera apenas a direção do movimento e não o movimento em si:

$$\vec{F}_c = \frac{mv^2}{R}\hat{r} \qquad 174$$

O estudo de forças a partir de suas considerações sobre a energia permite tratar com muito mais clareza, e as vezes até com mais simplicidade, diversos problemas envolvendo forças, pois evita muito dos trabalhosos cálculos envolvendo vetores. A mecânica lagrangeana e hamiltoniana dão introdução a este estudo de forças conservativas e não conservativas, a partir de um olhar menos diretamente ligado ao cálculo vetorial e mais para as equações diferenciais.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A abordagem a partir das forças conservativas e não conservativas mostrou-se produtiva, pois dentro desta, diversos conceitos tanto de Cálculo quanto de Física, puderam ser trabalhados e relacionados entre si, mostrando a importância de um ensino contextualizado para uma melhor prática da aprendizagem.

Mas não basta apenas utilizar métodos ou ferramentas, saber repassar e explicar, mas também, incentivar o raciocínio e interpretação dos problemas, olhando-o por diversos ângulos diferentes, pode enriquecer ainda mais os estudos tanto para o lado do discente quanto do docente. A abstração de alguns problemas faz parte da natureza inerente da Matemática e da Física, por isso, um bom docente deve saber trabalhar bem com isso, tornando enriquecendo ainda mais o ensino.

Muitos materiais abordam de forma diferente os conteúdos e os conceitos, alguns focam muito mais na matematização, mesmo que voltados para a física, sendo perdida em boa parte o contexto considerado. Alguns abordam conceitos específicos de forma mais direta, contextualizada e prática como seria o caso de Nussesnzveig, outros são mais diretos quanto ao cálculo, como é o caso de Stewart.

O Cálculo Vetorial na Física é um exemplo de como diversos recursos podem ser utilizados, pois alguns princípios são realmente mais difíceis de se compreender em primeira análise, e saber trabalhar com todos em conjunto com o conteúdo de Cálculo, sendo um exemplo de como independentemente de ser no Ensino Superior ou no Ensino Básico, um docente deve sempre se atualizar e se adaptar a evolução do mundo, assim como os próprio discentes o fazem.

7 BIBLIOGRAFIA

ALONSO, Marcelo; FINN, Edward J. **Física**. Lisboa: ESCOLAR EDITORA, 2012.

ANNA, Blaidi Sant‘; MARTINI, Gloria; REIS, Hugo Carneiro; SPINELLI, Walter. **Conexões com a física**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2010. v. 1.

ANTONOWISKI, R.; ALENCAR, M. V.; ROCHA, L. C. T. Dificuldades encontradas para aprender e ensinar física moderna. **Scientific Electronic Archives**, [*s. l.*], v. 10, n. 4, p. 50 - 57, 2017.

BASSANEZI, Rodney C. **Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2011.

BORGES, Marcos Francisco. A prática do professor de matemática em sala de aula e a sua concepção de conhecimento. *In*: SOUSA, Josimar de; CEVALLOS, Ivete. **A formação, os saberes e os desafios do professor que ensina matemática**. 1. ed. Curitiba: CRV, 2014. v. 1, cap. 7, p. 147-164.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

BUTKOV, Eugene. **Física matemática**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1983

DEMIDOVITCH, Boris. **Problemas de análise matemática**. 1. ed. Goiânia: Decklei, 2015.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física básica**: mecânica. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. v. 1.

KARAM, Ricardo Avelar Sotomaior, PIETROCOLA, Maurício. Habilidades técnicas *versus* habilidades estruturantes: Resolução de Problemas e o papel da matemática como estruturante do pensamento físico. **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia.** Volume 2, n° 2, p. 181 – 205, julho, 2009.

MEYER, João Frederico da Costa de A.; CALDEIRA, Ademir Donizeti; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em Educação Matemátca**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

MONTEIRO, Marco Aurélio Alvarenga. O uso de tecnologias móveis no ensino de física: uma avaliação de seu impacto sobre a aprendizagem dos alunos. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, [*s. l.*], v. 16, n. 1, 2016.

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de física básica**: mecânica. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2013. V. 1.

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de física básica**: fluidos, oscilações e ondas, calor. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2014. v. 2.

OLIVEIRA, Mário José de. **Termodinâmica**. 2. ed. rev. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.

OLIVEIRA JÚNIOR, Vlademir Fernandes de *et al*. A Matemática como habilidade estruturante no contexto pedagógico, na experimentação e na modelagem em Física. **REMAT**: Revista Eletrônica da Matemática, [*s. l.*], v. 7, n. 1, 30 jun. 2021. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/4825. Acesso em: 23 jun. 2022.

SALINAS, Sílvio R. A. **Introdução à física estatística**. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2018.

SANTAROSA, Maria Cecilia Pereira, MOREIRA, Marco Antônio. O cálculo nas aulas de física da UFRGS: Um estudo exploratório. Investigações em Ensino de Ciências, volume 16, n° 2, p. 317 – 351, outubro, 2011. Disponível em: https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/232. Acesso em: 07 de setembro de 2021.

SANTOS, Diego Flexa dos; BARROS, Sâmia Costa de. **Trabalho realizado por uma força**: uma aplicação da integral de Riemann. Orientador: Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil. 2011. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em matemática) - Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2011.

SOUSA, Angélica Silva de; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de; ALVES, Laís Hilário. A pesquisa bibliográfica: Principio e fundamentos. **Cadernos da Fucamp**, [*s. l.*], v. 20, n. 43, p. 64-83, 2021. Disponível em: https://revistas.fucamp.edu.br/index.php/cadernos/article/view/2336. Acesso em: 3 jul. 2022.

SOUSA, Leandro Quaresma de. A modelagem matemática como metodologia inovadora para o ensino aprendizagem de física. **Revista Científica Semana Acadêmica.** Volume 01, fevereiro, 2018. Disponível em: https://semanaacademica.com.br/artigo/modelagem-matematica-como-metodologia-inovadora-para-o-ensino-e-aprendizagem-de-fisica. Acesso em: 07 de setembro de 2021.

TAYLOR, John R. **Mecânica clássica**. Porto Alegre: Bookman, 2013.

THORNTON, Stephen T.; MARION, Jerry B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2018.

WOLFF, Maria Eliza; SILVA, Dirceu Pereira da. **O software geogebra no ensino de matemática**. PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2013. Curitiba: SEED/PR., 2016. V.1. (Cadernos PDE). Disponível em: <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=20>. Acesso em 12 de agosto de 2022.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A.; FORD, A. Lewis. **Física**: mecânica. 14. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016. v. 1.