

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E  
TECNOLOGIA DE RONDÔNIA  
CAMPUS CACOAL  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**THALES MENDES OLIVEIRA**

**A DIFERENCIAL: TEOREMA EGREGIUM DE GAUSS**

**CACOAL-RO  
DEZEMBRO/  
2021**

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E  
TECNOLOGIA DE RONDÔNIA DIRETORIA DE ENSINO  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM  
MATEMÁTICA**

**THALES MENDES OLIVEIRA**

**A DIFERENCIAL: TEOREMA EGREGIUM DE GAUSS**

Trabalho de conclusão de curso na modalidade monografia apresentado à Coordenação de Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia – IFRO, Campus Cacoal.

Orientador: Prof. Me. Claudemir Miranda Barboza.

**CACOAL-RO  
DEZEMBRO/  
2021**

## AGRADECIMENTOS

Agradeço Primeiramente a Deus, por me ajudar de todas as formas possíveis, a ter saúde e disposição durante o momento em que realizei esta pesquisa

Agradeço também a minha família por ter me dado incentivo, por não me deixarem desistir em decorrência das dificuldades relacionadas a distância da minha residência ao campus, também pelo fato de trabalhar o dia todo com apenas poucas horas disponíveis para estudar.

Agradeço imensamente ao professor Claudemir Miranda Barboza, por aceitar ser meu orientador em um trabalho extenso e delicado como este. Fico muito agradecido pela paciência e pelos bons conselhos dele se tratando da estrutura da pesquisa, da forma como ela foi apresentada e por me dar confiança no meu trabalho mesmo em momentos em que tive vontade de abandonar a mesmo.

Devo os meus agradecimentos também a amigos e professores, principalmente aos professores que deram o seu melhor nas aulas para garantir a excelência do processo de ensino e aprendizagem. Agradeço pelas pessoas que me indicaram esse curso, pelos meus ex-professores da escola que me incentivaram a estudar essa disciplina maravilhosa que é a matemática.

## **RESUMO**

Este trabalho trata-se de uma breve introdução a teoria das superfícies fato que faz parte de um ramo da matemática muito importante que é a geometria diferencial. Abordaremos os princípios básicos relativos as superfícies de um modo geral afim de obter um grande acervo de informações que nos aproxime de responder questões do tipo, será que uma esfera pode se desdobrar em uma faixa de plano? Qual a natureza geométrica das superfícies que podem ser desdobradas uma na outra? Tudo isso servirá como ponto de discussão deste estudo.

**PALAVRAS CHAVES:** Geometria diferencial. Curvatura. Teorema notável de Gauss.

## **ABSTRACT**

This work is a brief introduction to the theory of surfaces, which is part of a very important branch of mathematics which is differential geometry. We will approach the basic principles of surfaces in general in order to obtain a large amount of information that will bring us closer to answering questions such as, can a sphere unfold into a plane strip? What is the geometric nature of surfaces that can be folded into each other? All of this will serve as the discussion point of this study.

**KEY WORDS:** Differential geometry. Curvature. Gauss remarkable theorem.

## INDICE DE FIGURAS

Figura 1: Modelo de espaço tridimensional .....	12
Figura 2: Superfícies sem furos e com furos.....	13
Figura 3: A parametrização local de uma superfície .....	14
Figura 4: parabolóide hiperbólico .....	17
Figura 5: Superfície gerada por um gráfico de função. ....	18
Figura 6: Imagem produzida no GeoGebra das superfícies que é o gráfico da função $ex+ye$ o plano tangente no ponto $(-1,1,1)$ . A reta que passa por $p$ é ortogonal ao plano tangente.....	23
Figura 7: Vetores tangentes as curvas coordenadas .....	27
Figura 8: Demostra os dois pontos $p$ e $q$ de modo que $p$ está no plano tangente, enquanto que o ponto $q$ está apenas na superfície.....	29
Figura 9: Para uma reta de uma faixa de plano, a sua imagem no cilindro circular é uma geodésica que corresponde a uma hélice circular .....	37
Figura 10: cilindro circular equilátero. As retas paralelas a $(PQ)^-$ são meridianos .....	38
Figura 11: A curva $\beta_1$ definida para $r=2$ feito no GeoGebra é uma hélice circular .....	39
Figura 12: esfera de raio $r=1$ com uma circunferência máxima com origem coincidindo com a origem da esfera.....	40
Figura 13: triângulo na esfera de raio unitário .....	41
Figura 14: Representação dos domínios das curvas no plano.....	42

## SUMÁRIO

•	Introdução .....	9
•	Metodologia .....	10
•	AS SUPERFÍCIES REGULARES DO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL.....	12
•	Superfície Parametrizada Regular .....	13
•	A injetividade de uma superfície regular.....	18
•	Mudança de Parâmetro .....	19
•	Plano tangente.....	20
•	Vetor tangente.....	20
•	O plano tangente .....	21
•	Definição da reta tangente .....	21
•	O plano tangente na perspectiva dos subespaços gerados.....	22
•	O vetor normal .....	23
•	4. PRIMEIRA E SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL .....	24
•	Primeira forma fundamental .....	24
•	Relação da primeira forma fundamental com alguns conceitos importantes .....	26
•	Segunda forma fundamental .....	28
•	<b>distância de um ponto <math>q</math> próximo de <math>p</math> em relação ao plano tangente a <math>p</math></b> .28	
•	<b>A segunda forma fundamental é independente da curva</b> .....	30
•	CURVATURAS .....	31
•	curvatura normal .....	31
•	Curvaturas principais, curvatura de Gauss .....	31
•	5.3 A curvatura gaussiana.....	32
•	6. Símbolos de Christoffel de uma dada superfície $X$ .....	32
•	7. TEOREMA EGREGIUM DE GAUSS E SUA UTILIDADE NA TEORIA LOCAL DAS SUPERFÍCIES.....	33
•	Conclusão.....	43
•	Referências.....	44

## 1.INTRODUÇÃO

A geometria diferencial assim como qualquer outro ramo da matemática possui um contexto histórico muito abrangente. Em resumo, ela aplica a geometria conceitos de cálculo diferencial e integral a problemas cuja solução com os métodos usuais comuns seriam desgastantes ou mesmo impossíveis. Este setor da matemática surge principalmente de problemas topológicos e cartográficos. Seus principais instituidores são o matemático Gauss, Riemann e entre outros como Euler. O desenvolvimento da geometria diferencial possibilitou uma ampliação nos conceitos de análise real e por consequência também da geometria analítica. Isto é, a interpretação dos problemas algébricos através da geometria de Descartes pode também ser usada no que diz respeito a geometria diferencial e as dificuldades de resolução em análise e álgebra. Como efeito, toda uma nova gama de conhecimentos que possibilitam a aplicação de conceitos puros da matemática como equações diferenciais ordinárias, parciais e sistemas de equações autônomos lineares ou não lineares, utilizados na obtenção de curvas específicas como as geodésicas, conceitos de espaço euclidiano de  $n$  dimensões o que não é comumente utilizado na geometria plana e espacial e conceitos que envolvem a revolução de sólidos em que mais uma vez citamos a utilização do cálculo diferencial na sua construção. Outro ponto importante que deve ser ressaltado, é que nesta pesquisa, nos preocupamos com a seguinte questão, será que existe uma forma de transformar uma folha de papel em uma esfera sem amá-la?

Dessa forma, para responder a esta pergunta, desenvolvemos a pesquisa da seguinte forma; a primeira seção deste trabalho vai tratar de superfícies regulares no espaço tridimensional conceitos de suma relevância no estudo como o significado usual de superfície tomando um exemplo que se pode verifica-la no espaço tridimensional, a definição formal de superfície regular, a injetividade no contexto que possibilita superfícies regulares admitir plano tangente e por fim a mudança de parâmetro.

Da forma como se segue, a segunda seção trata de retoma os conceitos vetor tangente, plano tangente e vetor normal considerações oriundas do cálculo.

Além disso, salienta a visão do plano tangente na perspectiva de subespaços gerados conceito acarretado das ramificações da álgebra e topologia.

Na terceira secção, discutimos o conceito de primeira forma fundamental e sua relação com as propriedades intrínsecas da forma geométrica, isto é, ângulos, comprimentos e áreas.

Além disso, é nesta etapa que ressaltamos o conceito de segunda forma quadrática ou fundamental um segmento que respalda o tema principal desse estudo.

A partir do que se destacou na divisão anterior, introduzimos os termos curvatura normal, curvaturas principais curvatura de Gauss e curvatura gaussiana na quarta secção apenas destacando suas principais propriedades.

Usando dos conhecimentos obtidos nas partes anteriores do trabalho, construímos através de respaldo teórico um dos dispositivos mais importantes da geometria diferencial que é os símbolos de Christoffel de uma dada superfície regular.

E por fim, a última secção diz respeito ao Teorema de Egregium de Gauss e sua utilidade na teoria local das superfícies. Nosso foco é mostrar suas principais utilidades desse teorema dentro da própria matemática uma vez que ele permite entender que a natureza intrínseca das superfícies se mante por isometria.

## **2. METODOLOGIA**

Geralmente, os cursos de licenciatura em matemática não proporcionam a área de geometria diferencial na sua grade curricular. Dessa forma, este projeto tem por finalidade construir um conhecimento nesta área para os licenciados em matemática que pretendem cursar uma pós-graduação em matemática pura.

Com isso, essa pesquisa se reflete essencialmente ao caráter bibliográfico. Desse modo, será de suma importância o respaldo teórico de autores estritamente na área de geometria diferencial e, com objetivo didático da organização quanto à clareza das hipóteses, também terá importância autores que trabalham em outras áreas como na análise real, cálculo diferencial e integral, física e entre outras que

poderão surgir com a necessidade de cumprir com a clareza das ideias propostas ao decorrer da pesquisa.

Com isso, podemos então destacar como será abordada as técnicas mais importantes deste trabalho. Nosso enfoque, é como já foi dito, essencialmente bibliográfico uma vez que naturalmente os temas e assuntos diversos acerca-se da matemática pura são respaldados em obras científicas literárias. Assim, por essa razão, este trabalho parte da análise de livros, artigos, revistas e monografias. Esta análise será feita através da observação dos conhecimentos construídos dos vários autores que se desempenharam a discutir sobre geometria diferencial além de, buscarmos referências do mesmo modo em autores que se desempenharam uma construção em outras áreas do conhecimento como análise real uma vez que, muitos conceitos que são de suma relevância na teoria das superfícies tiveram suas bases na análise real e também na geometria analítica de Rene Descartes pois, construímos as superfícies em torno do espectro de um espaço euclidiano que é naturalmente representado por retas cartesianas muito utilizado na geometria analítica. Assim, iremos fundamentar-se em textos de estudos científicos nestas áreas, isto é, na própria geometria diferencial, na análise real e também na geometria analítica. Outros ramos do conhecimento que também serão de suma importância são o cálculo diferencial, a álgebra linear e a geometria euclidiana. Isso porque, como o próprio assunto do estudo se refere avaliar as aplicações do cálculo diferencial na geometria afim de buscar soluções para problemas que os métodos euclidianos são raramente eficientes. Desta forma, nossos estudos devem ser baseados nestes temas.

A abordagem que utilizaremos é descrever de modo simplificado todas as mais importantes vertentes desses conhecimentos que sejam úteis para a edificação e elaboração das respostas que queremos encontrar neste estudo afim de concluir nosso objetivo. Assim, iremos intercalar autores que ressaltam assuntos na área de geometria diferencial com autores que discorrem sobre cálculo diferencial para contribuir com as respostas-chaves do estudo ou para discordar em alguns pontos que precisão ser revisados.

Podemos agora falar das técnicas que iremos dispor para aproximar-se do objetivo deste estudo. Por tratar-se de um estudo bibliográfico, nossa principal ferramenta será a leitura de livros, revistas científicas, artigos e monografias que tanto poderá ser trabalhos de conclusão de curso como também dissertações de

mestrado ou teses de doutorado. A partir dessa leitura, faremos uma série de questões a respeito do tema em si e reavaliaremos através de outros textos feitos por outros autores se há divergências ou convergências de opiniões e assim construímos passos para chegar até nossas respostas.

Outra técnica que será muito utilizada, é a demonstração de teoremas feitas com análise do próprio pesquisador em respaldo com o autor e com relação a outros autores relativos a outras pesquisas.

Também abordaremos justificativas desses teoremas de modo matemático, isto é, algumas demonstrações serão feitas totalmente de fora algébrica logicamente feita a partir de referências pré-estabelecidas. É dessa forma que daremos continuidade ao trabalho.

### **3. AS SUPERFÍCIES REGULARES DO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL**

Inicialmente, neste estudo sobre a teoria local das superfícies, o conceito de superfície parametrizada será de suma importância. Porém, de forma pouco formal, no entanto não menos relevante, adquirimos como ponto de partida o conceito de superfície como um subconjunto de pontos do espaço tridimensional euclidiano<sup>1</sup>  $\mathbb{R}^3$  cujas posições desses pontos estão relacionadas com alguma propriedade algébrica.

Com essa definição, é possível perceber que se pode imaginar qualquer conjunto de pontos que pertença ao espaço dimensional de três dimensões. De uma forma intuitiva, podemos visualizar uma sala em que a linha que divide duas paredes arbitrária e adjacentes pode ser associada ao eixo z e, as linhas que separam as mesmas duas paredes do piso podem representar os eixos x e y do sistema cartesiano ortogonal de retas. Assim, uma superfície pode ser comparada a uma toalha ou tapete que faz pequenas dobras nessa sala ou um pano grande que duas pessoas seguram entre as extremidades ou até mesmo a parte de cima de uma mesa que estiver nessa sala.

Figura 1: Modelo de espaço tridimensional

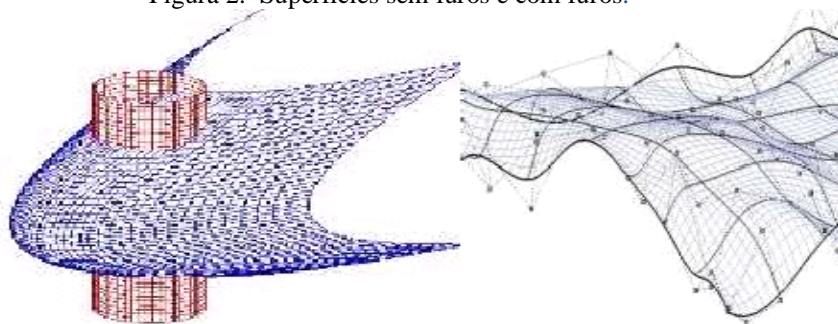


Fonte: <https://www.gestaoeducacional.com.br/figuras-tridimensionais-o-que-sao/>

Nessa visão, uma superfície poderá assumir qualquer forma, até mesmo pode sofrer intercessões ou conter trechos abertos (pode-se imaginar um pano com furos).

<sup>1</sup> Um espaço vetorial real, de dimensão finita, no qual está definido um produto interno, é um espaço vetorial euclidiano. STEINBRUCH, Alfredo, WINTERLE, Paulo, Álgebra Linear 2ªed. p.111.

Figura 2: Superfícies sem furos e com furos.



FONTE: <http://mat.ufpb.br/~lenimar/cgraf/inters/index.html> e <https://docplayer.es/86199721-Alvaro-barreiro-barba-panelizacion-de-superficies-de-forma-libre-en-arquitectura-de-la-idea-construccion.html>

Entretanto, este estudo se restringirá a um tipo especial de superfície, estas apresentam uma propriedade importante na teoria local das superfícies que é o fato de admitirem planos tangentes em todos os seus pontos<sup>2</sup> são chamadas de superfícies parametrizadas regulares.

- **Superfície Parametrizada Regular**

Para Tenenblat (2008, p.109) “uma superfície parametrizada regular é uma transformação  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , de modo que  $U$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ , tal que devem ser satisfeitas duas condições”:

- $X$  é uma aplicação diferenciável de classe  $C^\infty$  o símbolo do infinito aqui está sendo usado para indicar que a função ou neste caso a aplicação é diferenciável em todas as ordens que se queira, isto é, de ordem 1, 2, 3 e assim sucessivamente;
- sua diferencial em qualquer ponto  $p$  de  $U$  é necessariamente injetora, em outras palavras, ao derivar a superfície  $S$  parametrizada por  $X$  no ponto  $p$  a aplicação encontrada  $dX_p$ .

Observa-se que o conjunto imagem da aplicação  $X$  é um subconjunto do  $\mathbb{R}^3$  designado por  $S$  que é chamado de carta ou sistema de coordenadas local de  $X$  (BIEZUNER, 2019, p.58).

<sup>2</sup> Decorrente da definição de superfícies regular a diferenciabilidade é a condição que garante a existência de planos tangentes em todos os seus pontos segundo TENENBLAT, Introdução à Geometria Diferencial 2ªed. p110.

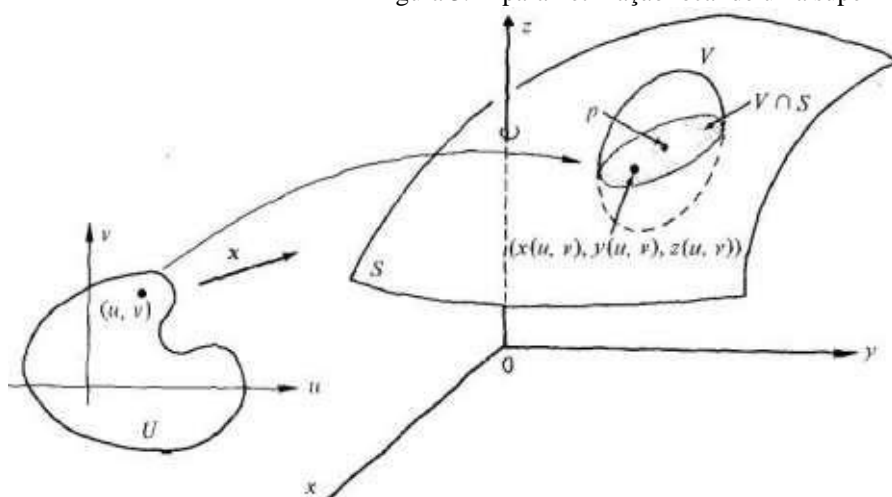
Também é importante destacar que, em relação à condição a), o fato da aplicação  $X$  ser diferenciável de classe  $C^\infty$  implica que suas funções coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  têm derivadas parciais, em relação aos seus parâmetros, de todas as ordens contínuas como já citamos.

A condição b) implica que a superfície não sofre intersecção pois se a diferencial de uma superfície  $X$  é injetora, então os vetores tangentes serão distintos para pontos distintos do subconjunto  $U$  do  $\mathbb{R}^2$  (Tenenblat,2008) justificaremos esse fato logo em seguida, no entanto precisamos antes observar como é feita a parametrização de  $S$  pela transformação  $X$ .

Consideremos uma superfície  $S$  dada pela parametrização local  $X(u, v)$  onde  $u$  e  $v$

determinam um plano do subconjunto  $U \subset \mathbb{R}^2$  como exemplifica a figura 4:

Figura 3: A parametrização local de uma superfície



FONTE: Carmo 2005

A figura [3] mostra a transformação do plano  $U$  determinado por  $u$  e  $v$ , através da transformação  $X$ , em um plano tridimensional  $V$ . Geralmente é comum nos livros de ensino médio, ou até de nível superior a notação  $(x, y)$  em que  $x$  e  $y$ , respectivamente, representam coordenadas cartesianas e que o sistema de retas com esses símbolos determinava um plano em  $\mathbb{R}^2$ . Entretanto, por questões de simplificação e para não confundir o leitor, usaremos as notações  $u$  e  $v$  em vez de  $x$  e  $y$  para indicar um plano como subconjunto do  $\mathbb{R}^2$  uma vez que a parametrização de  $S$  usará os emblemas  $x, y$  e  $z$  na sua estrutura algébrica (ver figura 4),  $X = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ .

Se usarmos  $x$  e  $y$  no lugar de  $u$  e  $v$  teríamos o problema de notação  $(x(x, y), y(x, y), z(x, y))$  o que tornaria extremamente confuso em algumas situações que envolvem cálculos mais complexos como por exemplo, uma mudança de variável, como veremos mais adiante.

Portanto, como uma forma de simplificação usaremos  $u$  e  $v$  no lugar de  $x$  e  $y$  para designar um plano de um subconjunto  $\mathbb{R}^2$  sob a qual a parametrização está partindo e que assumirá valores no espaço  $\mathbb{R}^3$ .

Uma vez compreendida esta ideia, voltaremos a explicar a condição b). como foi dito, por Tenenblat, (2008) é necessário que a parametrização  $X$  tenha uma diferencial em  $q$  invertível para que não haja intercessões na superfície fato que impede que ela admita plano tangente. Justificamos isso dizendo que como a diferencial de  $X$  é injetora, os vetores  $X_u$  e  $X_v$ , (derivada parcial de  $X$  em  $u$  e,

derivada parcial de  $X$  em  $v$  respectivamente) em que  $u$  e  $v$  são parâmetros, tornam-se vetores linearmente independentes.

Podemos verificar isso, observando a matriz jacobiana que representa esses vetores como sendo:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \end{pmatrix} (u_0, v_0)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} (u_0, v_0)$$

$$j(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} (u_0, v_0)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} (u_0, v_0)$$

Essa matriz contém em sua primeira coluna o vetor  $X_u$  e na segunda coluna o vetor  $X_v$ .

Definimos uma submatriz  $r \times r$ , (aqui o sinal  $\times$  está indicando apenas que se trata de uma matriz com  $r$  linhas e  $r$  colunas) de uma matriz  $A_{m \times n}$ , uma matriz tal que é eliminada  $m - r$  linhas e  $n - r$  colunas. O posto de uma submatriz é o maior inteiro  $r$  para o qual a submatriz  $r \times r$  apresenta determinante não nulo.

De acordo com Tenenblat (2008) se a submatriz da matriz  $j(u_0, v_0)$  tiver posto 2 a aplicação  $dX_q$  será injetora e seus vetores serão linearmente independentes, além do mais, o produto vetorial entre os vetores  $X_u$  e  $X_v$  em  $(u_0, v_0)$  não é nulo.

Este fato, da matriz associada a diferencial do sistema de coordenadas local no ponto  $q$

$dX_q$  ter posto 2, isto é, o determinante da submatriz de  $dX_q$  não é nulo também é ressaltado por (MACKI, 1995).

Observe que aqui,  $dX_q$  quer dizer diferencial da aplicação  $X$  no ponto  $q$  como cita Biezuner (2019)

Sejam  $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$  superfícies regulares de classe  $C_k$  e  $F : S_1 \rightarrow S_2$  uma aplicação diferenciável de classe  $C_k$ . Dado  $p \in S_1$  definimos a aplicação diferencial

$$dF_p = T_p S_1 \rightarrow T_{F(p)} S_2$$

da seguinte forma: dado  $V \in T_p S_1$ , se  $\alpha : I \rightarrow S_1$  é uma curva parametrizada regular tal que  $\alpha(t_0) = p$  e  $\alpha'(t_0) = V$ , então

$$dF_p(V) = (F \circ \alpha)'(t_0)$$

(BIEZUNER, 2019, p.68).

Aqui, a notação  $C_k$  indica que as superfícies citadas admitem derivadas contínuas até uma ordem  $k$ , isto é, qualquer derivada da aplicação  $X$  cuja ordem esteja naturalmente entre 1 e  $k$ , será contínua. Outra observação importante é a de que o autor usa  $F$  no lugar de  $X$ , no entanto, ambas tanto  $F$  quanto  $X$  são as letras que representam as parametrizações de uma superfície  $S$  mergulhada no espaço tridimensional. A notação  $T_p S$  indica plano tangente no ponto  $p$  fato esse que vamos falar mais adiante. Entretanto, devemos ressaltar que nesta perspectiva, o  $dX_q$  cujo domínio está em algum subconjunto do próprio domínio de  $X$  e sua imagem é um traço que pertence ao espaço  $\mathbb{R}^3$ .

Ainda segundo Biezuner (2019), é possível demonstrar que  $dX_q$  é uma aplicação linear pois, como pode ser visto,  $dF_p = T_p S_1 \rightarrow T_{F(p)} S_2$  e a imagem da diferencial está em um plano tangente. Em Tenenblat (2008) também encontramos referências a respeito da notação  $dF_p$ :

0

Dizemos que uma função  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é diferenciável em  $p_0$  se existe uma aplicação linear de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$ , denotada por  $dF_{p_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , tal que, para todo

vetor  $w \in \mathbb{R}^n$ ,

$$F(p_0 + w) = F(p_0) + dF_{p_0}(w) + R(w)$$

Onde  $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{R(w)}{|w|} = 0$ . (TENENBLAT, 2008, P.21).

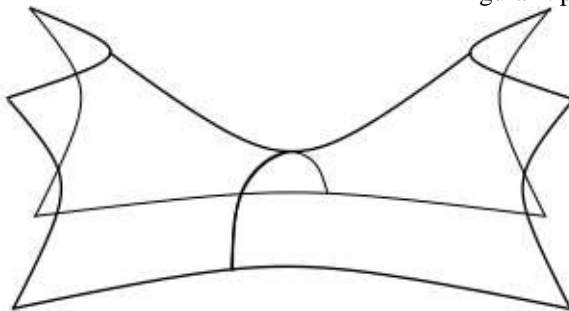
Um exemplo de superfície regular é dado por Lima (2016, p36) que é a aplicação real  $f$  que está definida em um subconjunto do  $\mathbb{R}^2$  como veremos.

**Proposição 1.** Seja  $f(u, v)$  uma função real que apresenta derivadas parciais de primeira ordem não necessariamente nulas, para qualquer ponto  $(u, v)$  de um subconjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . Nestas condições, a aplicação:

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

É uma superfície parametrizada e regular.

Figura 4: parabolóide hiperbólico



FONTE: LIMA (2016)

**Demonstração.** Seja a superfície  $X$  dada por  $X(u, v) = (x, y, z)$  de tal forma que suas coordenadas estão definidas em  $u$  e  $v$  isto é,  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  e  $z = z(u, v)$ . Como  $X$  é uma superfície regular por hipótese da proposição, a matriz jacobiana de  $dX_q$  para o ponto  $q = (u_0, v_0)$  tem posto 2. Deste modo

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}$$

Tem posto 2 e cujo determinante é não nulo. Esse fato conclui a demonstração por D' Carmo (1976).

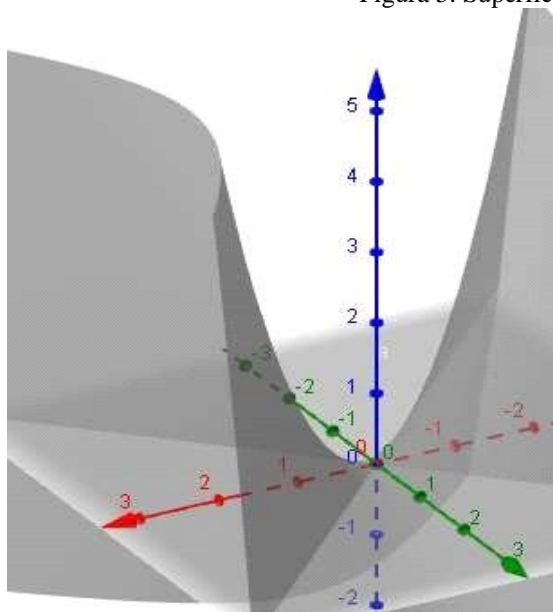
Um exemplo desse tipo de superfície é a parametrização  $X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ , como mostra a figura [6]. A natureza algébrica dessas estruturas é marcada pela presença dos primeiros parâmetros  $u, v$  e por fim, a função  $f(u, v)$  que pode ser qualquer função desde que seja contínua.

Vejamos um outro exemplo, a função  $f(u, v) = u^2 + v^2$  com os parâmetros  $u$  e  $v$  também determinam uma superfície regular visto que a função  $f$  é naturalmente contínua e, podemos escolher um subconjunto do domínio no qual esta função é localmente injetiva.

Na realidade, qualquer superfície sob esta forma com uma função  $f$  contínua e bem definida em seu domínio será uma superfície parametrizada e regular. Dizemos que essas superfícies são gráficos de funções parametrizadas e sempre podemos tomá-las como regulares uma vez que isso foi provado na proposição 1 acima.

Logicamente, podemos destacar outras formas algébricas de parametrização que resultam em uma superfície regular, isto é, além das superfícies dadas por gráficos de uma função.

Figura 5: Superfície gerada por um gráfico de função.



FONTE: Autor

Como se pode observar, o fato de a transformação ser injetora é muito importante para o estudo das superfícies parametrizadas regulares. No entanto, nem toda superfície é perfeitamente regular em alguns pontos de seu domínio, algumas possuem locais de auto interseção assim como curvas que se cruzam em um ou mais pontos. Nesse caso, mesmo que haja interseção podemos imaginar um

subconjunto do domínio em que essa superfície é regular. É desse assunto que trata a proposição seguinte:

- **A injetividade de uma superfície regular**

**Proposição 2.** Dada uma superfície parametrizada regular  $X$ , definida em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  cujo traço está em  $\mathbb{R}^3$ . Nestas condições, quaisquer que seja  $(u_0, v_0) \in \Omega$ , existe  $\Omega_1 \subset \Omega$  tal que,  $(u_0, v_0) \in \Omega_1$  e  $X$  restrita a  $\Omega_1$  é injetora.

**Demonstração.** Seja a superfície  $X$  dada por  $X(u, v) = (x, y, z)$  de tal forma que suas coordenadas estão definidas em  $u$  e  $v$  isto é,  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  e  $z = z(u, v)$ . Como  $X$  é uma superfície regular por hipótese da proposição, a matriz jacobiana de  $dX_q$  para o ponto  $q = (u_0, v_0)$  tem posto 2. Deste modo

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial u}{\partial u}$

$\frac{\partial v}{\partial v}$

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \quad \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)$$

$$J(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow |J|$

$\frac{\partial v}{\partial v}$

$|J| \neq 0$

$\frac{\partial u}{\partial u}$

$\frac{\partial v}{\partial v}$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \quad \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \quad \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)$$

$\frac{\partial u}{\partial u}$

$\frac{\partial v}{\partial v}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Consideremos a função  $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ . Pelo teorema da função inversa existe  $\Omega_1 \subset \Omega$  tal que  $F$  restrita a  $\Omega_1$  admite inversa e desse modo, é

injetora. Logo, para  $X(u, v) = (x, y, z)$  o par  $(x, y)$  assumindo a forma  $F(u, v) = (x, y)$  é consequentemente injetora, pois, mesmo que  $z_0 = z_1, (x_0, y_0) \neq (x_1, y_1)$ , pois  $F$  é injetora. Assim,  $X(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0) \neq X(u_1, v_1) = (x_1, y_1, z_1)$ . Concluiu-se a demonstração.

No estudo das superfícies parametrizadas regulares, a invertibilidade é um critério obrigatório cuja necessidade está relacionada com a existência de planos tangentes. A proposição anterior garante que, se a matriz jacobiana de  $X$  tem posto 2 para todos os elementos de seu domínio, então ela é injetora. Quando ocorre da matriz jacobiana de  $X$  não ter posto 2 para um ponto  $(u_0, v_0)$ , dizemos que esse ponto é um ponto singular de  $X$ .

**Proposição 3.** Dada uma aplicação diferenciável  $F$  cujo domínio é um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^3$  e tem imagem nos números reais  $\mathbb{R}$ . Dizemos que,  $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = k \}$  com  $k$  uma constante real é uma superfície parametrizada regular se para um ponto  $p \in S$ ,  $(F_x)^2 + (F_y)^2 \neq 0$  em que  $F_x$  e  $F_y$  são as derivadas parciais de  $F$ .

Para provar essa proposição podemos tomar o teorema das funções implícitas Guidorizzi, (2013, p.302). Neste caso, de acordo com Tenenblat (2008, p.122) pode-se, sem perda por generalidade tomar  $F_z(p) \neq 0$  e, pelo teorema das funções implícitas, existem um subconjunto  $U$  aberto no  $\mathbb{R}^2$  e uma função  $\mu(x, y)$  tal que,  $F(x, y, \mu(x, y)) = k$ . Logo, o conjunto  $(x, y, \mu(x, y))$  em  $U$  será uma superfície parametrizada e diferenciável. O mesmo pode ser feito para  $(F_x)^2$  e  $(F_y)^2$ .

- **Mudança de Parâmetro**

Quaisquer duas superfícies podem ser distintas algebricamente ou neste caso, apresentarem parametrizações diferentes, mas, possuírem o mesmo traço. É o caso das

superfícies  $X_0 = (u, v, u^2 - v^2)$  e  $X_1 = (u + v, u - v, 4uv)$ . Tanto  $X_0$  como  $X_1$  descrevem o mesmo traço no  $\mathbb{R}^3$  partindo de um mesmo domínio em  $\mathbb{R}^2$ .

De uma forma mais delicada, considera-se  $X$  como uma superfície regular tal que

$X: U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ . Seja  $\mu$  uma função de duas variáveis reais definida em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  a valores em  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Em outras palavras, a função  $\mu$  transforma os elementos de  $\Omega$  em vetores de  $U$ . Nestas condições, qualquer elemento de  $U$  é imagem, decorrente da transformação  $\mu$ , de um elemento de  $\Omega$ . Dai, seja  $Y$  superfície regular tal que,  $Y: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$  e,  $Y = X \circ \mu$  é natural esperar que  $Y$  e  $X$  apresentem o mesmo traço. Uma vez que isso ocorre  $Y$  é dita reparametrização por  $\mu$ .

O conceito de mudança de parâmetros é essencial para o estudo de vetores e dos planostangentes. Este será um assunto abordado no próximo tópico.

- **Plano tangente**

O conceito de plano tangente é fundamental não apenas para o cálculo diferencial, mas também para a geometria diferencial, uma vez que parte do cálculo diferencial se estende as aplicações na geometria diferencial.

Porém, esta pesquisa se restringe apenas as suas aplicações com respeito à geometria. O plano tangente em primeira análise permite a construção de áreas de superfícies.

Em aspectos mais gerais, ele está relacionado com as integrais de superfície, a primeira e segunda forma quadrática e, limitando se a nosso interesse, ao Teorema Egregium de Gauss.

- **Vetor tangente**

Segundo Tenenblat (2008), se uma superfície é regular, então existem curvas contidas nela. E, pelo cálculo diferencial e integral, em condições específicas, a derivada de uma curva determina um vetor tangente:

Seja, agora,  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  e seja  $t_0 \in A$ . Geometricamente, vemos  $\frac{dF}{dt}(t_0)$  como

um “vetor tangente” à trajetória de  $F$ , no ponto  $F(t_0)$ .

[...] **Definição 2.** Seja  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  derivável em  $t_0$ , com  $\frac{dF}{dt}(t_0) \neq \vec{0}$ . Dizemos

que  $\frac{dF}{dt}(t_0)$  é um vetor tangente à trajetória de  $F$ , em  $F(t_0)$ .  
(GUIDORIZZI, 2018, p.129).

Em Stewart, (2013, p.763), encontramos:

Seja  $\alpha(t)$  uma curva contida em  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , parametrizada regular. Qualquer  $w = \alpha'(t)$  será tangente à superfície  $X$ . Em especial,

tomemos as curvas constantes em  $u$  e em  $v$ , as derivadas  $X_u$  e  $X_v$  (são as derivadas parciais de  $X$  em  $u$  e em  $v$  respectivamente) serão vetores tangentes à superfície.

Observa-se que, como consequência da regularidade de  $X$ , os vetores  $X_u$  e  $X_v$  são linearmente independentes e, com isso, possuíam representantes com origens coincidentes que determinaram um plano. Os elementos desse plano serão naturalmente combinações lineares de

$X_u$  e  $X_v$ . Quando ele existe, é chamado de plano tangente que será o próximo assunto.

- **O plano tangente**

O plano tangente de uma superfície em um ponto arbitrário  $q$  é definido como sendo o conjunto de vetores tangentes a esta superfície relativo a este ponto específico. A partir do fato de,  $X_u$  e  $X_v$  aplicados a projeção de  $q$  na superfície, tratarem-se de vetores em um mesmo plano, podemos facilmente verificar que as combinações lineares determinadas por esses vetores serão tangentes a  $X$  no ponto  $q$  fato que tomaremos como a proposição seguinte. Contudo, podemos de início apenas resumir que, o plano tangente a  $X$  no ponto  $q_0$  é um conjunto que contém todos os vetores tangentes a  $X$  em  $q_0$ . É possível tomar outras formas de definição, como a utilizada por Stewart:

Suponha que uma superfície  $S$  tenha a equação  $z = f(x, y)$ , onde  $f$  tenha derivadas parciais contínuas de primeira ordem, e seja  $P(x_0, y_0, z_0)$  um ponto em  $S$ . [...], sejam  $C_1$  e  $C_2$  as curvas obtidas pela interseção dos planos verticais  $y = y_0$  e  $x = x_0$  com a superfície  $S$ . Então o ponto  $P$  fica em  $C_1$  e  $C_2$ . Sejam  $T_1$  e  $T_2$  as retas tangentes à curva  $C_1$  e  $C_2$  no ponto  $P$ . Então o plano tangente à superfície  $S$  no ponto  $P$  é definido como o plano que contém as retas da tangente  $T_1$  e  $T_2$ . (STEWART, 2013, p.823)

Já admitimos nesta pesquisa que, uma superfície é passiva a apresentar planos tangentes se ela for diferenciável. Isto é, se ela satisfaz as condições de regularidade apresentadas na definição de superfície parametrizada regular.

Entretanto, é importante ressaltar que, esse conceito de tangência não implica que o plano interceptará a superfície apenas uma única vez. Para entender esse fato, buscaremos a definição de tangência segundo Euclides e, retornaremos ao cálculo diferencial de uma variável para definir reta tangente a uma curva.

- **Definição da reta tangente**

Para Euclides ( ), uma reta que, tocando o círculo e, sendo prolongada, não o corta, é dita tangente ao círculo.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Os elementos de Euclides/ Irineu Bicudo/ livro III definições p. 151.

Entretanto, Leithold (1994) argumenta que para o cálculo de uma variável, essa definição é inadequada para curvas em geral, uma vez que, pode ocorrer tangência em um ponto, mas a reta de tangente em alguns casos intercepta a curva mais de uma vez. Nesse sentido, podemos definir reta tangente de forma mais específica para nosso estudo da seguinte forma:

Se uma curva  $C$  tiver uma equação  $y = f(x)$  e quisermos encontrar a reta tangente a  $C$  em um ponto  $P(a, f(a))$ , consideramos um ponto próximo  $Q(x, f(x))$ , onde  $x \neq a$ , e calculamos a inclinação da reta secante  $PQ$ :

$m_{PQ}$

$$= \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Então fazemos  $Q$  aproximar-se de  $P$  ao longo da curva  $C$  ao obrigar  $x$  tender a  $a$ . Se  $m_{PQ}$  tender a um número  $m$ , então definimos a tangente  $t$  como a reta que passa por  $P$  e tem inclinação  $m$ . [...] (STEWART, 2013, p.131).

A partir disso, como vimos na definição de plano tangente como um conjunto de retas tangentes a um ponto da superfície, se cada tangente é relativa a uma curva da superfície, e, respaldando em Stewart e Leithold podemos concluir naturalmente que o plano tangente não precisa tocar a superfície em um único ponto. Apenas que, à medida que nos aproximamos, de modo infinitesimal, de um ponto da superfície, esta, vai adquirindo cada vez mais a forma de um plano.

- **O plano tangente na perspectiva dos subespaços gerados**

Segundo D' Carmo (1976), o subespaço gerado pela diferencial  $dX_q(\mathbb{R}^2) \subset (\mathbb{R}^3)$ , onde,  $X$  uma parametrização da superfície  $S$ , coincide com o conjunto do plano tangente. O que faremos agora é demonstrar esse fato.

Primeiro, observamos que, um subespaço é um subconjunto de um espaço vetorial no qual se verificam os oito axiomas da álgebra linear. Entretanto, quando

se trata de subespaço, dois critérios são observados; (i) se um par  $(u, v)$  pertence a esse subespaço, então  $u + v$  também deve pertencer a ele; (ii) seja  $u$  um elemento desse subespaço e  $\alpha$  um número real,  $\alpha u$  deverá pertencer ao subespaço considerado.

Seja  $A$  um conjunto finito de vetores, as combinações lineares de seus elementos determinam um subespaço<sup>4</sup>. Se tomarmos,  $dX_q(\mathbb{R}^2) \subset (\mathbb{R}^3)$  como um conjunto de vetores independentes (podemos verificar facilmente que isso não é problema uma vez que, a superfície é dita regular, portanto, seus vetores tangentes são linearmente independentes) é possível

<sup>4</sup> An Introduction Linear Algebra Bronson, R, Costa, G. 2007. Essa mesma referencia pode ser encontrada em Steinbruch.

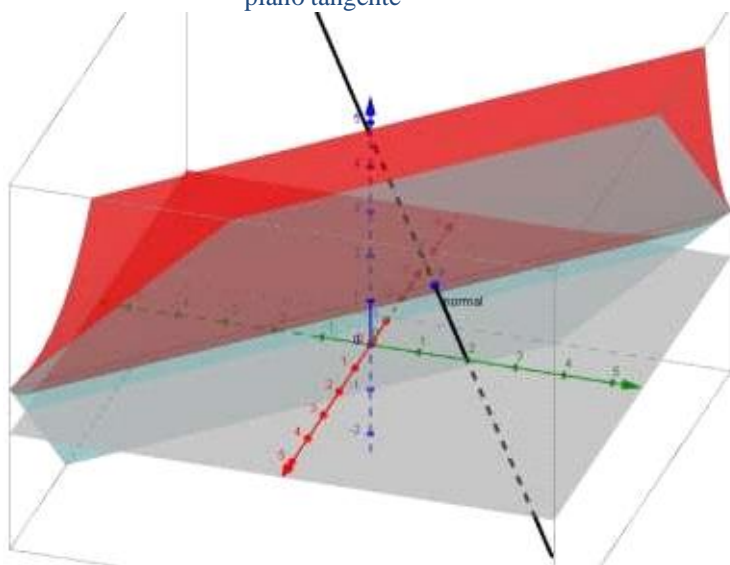
construir um subespaço vetorial com as combinações lineares envolvendo os elementos de

$dX_q(\mathbb{R}^2) \subset (\mathbb{R}^3)$  pois os critérios (i), e (ii) podem ser facilmente verificados.

- **O vetor normal**

Em uma dada superfície, passiva a admitir plano tangente em um ponto, digamos, no ponto  $p$ , é natural supor que haja uma reta que passa por  $p$  e, que seja ortogonal ao plano.

Figura 6: Imagem produzida no GeoGebra das superfícies que é o gráfico da função  $ex+y$  e o plano tangente no ponto  $(-1,1,1)$ . A reta que passa por  $p$  é ortogonal ao plano tangente



FONTE: Autor

Em D' Carmo (1976), essa reta é chamada de reta ou linha normal no ponto  $p$ . Por essa linha, é possível observar dois sentidos e, de modo trivial, dois vetores contidos nela e com sentidos opostos.

Deste modo, como consequência dessa reta ser normal ao plano tangente, e, decorrente das derivadas parciais da parametrização da superfície em um dado ponto serem vetores contidos no plano tangente e pelas propriedades do produto vetorial podemos facilmente adotar a direção ortogonal como sendo a:

$$N = X_u \times X_v$$

Entretanto, é mais comum trabalhar com o vetor acima normalizado dessa forma:

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$$

Em Tenenblat (2008), se variar o ponto  $p$  em todo o domínio da superfície, teremos uma aplicação diferencial chamada de aplicação normal de Gauss.

#### • **4. PRIMEIRA E SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL**

Uma vez desenvolvido o conceito de plano tangente, há muitas propriedades que podem ser determinadas sob esta perspectiva. Ressaltaremos duas que se trata de aplicações do plano tangente, aos números reais. Essas são a primeira e a segunda forma fundamental ou forma quadrática, que, nesses textos, receberá o nome forma fundamental em vez de forma quadrática em referência a D' Carmo e, por se tratar de um conceito fundamental na teoria local das superfícies.

##### • **Primeira forma fundamental**

Como já mencionamos toda superfície regular admite um plano tangente no subconjunto em que se encontra sua regularidade. E como todo plano é possível traçar infinitos pontos<sup>5</sup>, pela álgebra linear, cada ponto do plano possui uma correspondência biunívoca com os vetores do plano. Desse modo, pode-se inferir que se no plano há infinitos pontos, é natural esperar que o mesmo ocorra em termos de vetores. Com isso, e, tomando um plano tangente a um ponto  $q$  de uma superfície regular parametrizada, decorrente do raciocínio anterior, sabemos que

esse plano há infinitos vetores e, todos eles são combinações lineares dos vetores tangentes as curvas coordenadas como foi dito em 2.2 desse texto.

Tudo isso nos permite desenvolver uma aplicação real muito importante que associa cada vetor desse plano ao seu módulo elevado ao quadrado. Essa aplicação recebe o nome de primeira forma quadrática ou primeira forma fundamental relativa ao plano tangente T no ponto q. de forma mais formal:

[...] **Definição.** Seja  $X:U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular,  
 $\forall q \in U$ , a aplicação

$$I_q = T_q X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \rightarrow I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2$$

é denominada a *primeira forma quadrática* de X em q.  
 (TENENBLAT, 2008 p. 138).

<sup>5</sup> Todo plano tem infinitos pontos. Essa é uma noção primitiva encontrada em muitos materiais de geometria plana. Entretanto, podemos citar a obra Fundamentos de Matemática elementar 9; geometria plana/ Dolce, Osvaldo, Pompeo, José.

Podemos imaginar w sob a seguinte forma:

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$$

como  $I_q(w) = |w|^2$  temos que

$$|w|^2 = a^2 \langle X_u, X_u \rangle (u_0, v_0) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle (u_0, v_0) + b^2 \langle X_v, X_v \rangle (u_0, v_0)$$

Em termos de simplificação, faremos:

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle (u_0, v_0)$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle (u_0, v_0)$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle (u_0, v_0)$$

Desse modo, a primeira forma fundamental pode ser representada sob a seguinte forma:

$$I_q(w) = a^2 E(u_0, v_0) + 2ab F(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0)$$

Variando o ponto  $(u_0, v_0)$  no domínio, os números  $E, F$  e  $G$  tomam a forma de funções reais chamadas de coeficientes da primeira forma fundamental relativa à superfície. Essas funções assumem algumas propriedades muito importantes:

1ª propriedade:  $E(u, v)$  e  $G(u, v)$  são ambas maiores que zero.

Prova: se observar as funções  $E$  e  $G$  é fácil notar que ambas são módulos dos vetores  $X_u$  e  $X_v$  respectivamente. Como todo módulo por definição é maior do que zero essa propriedade fica demonstrada.

2ª propriedade:  $E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2 > 0$ .

Prova: decorrentes das propriedades dos vetores têm-se que:

$$\langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 \cos^2 \theta \quad (\text{cosseno do ângulo entre dois vetores})$$

Pela propriedade fundamental da trigonometria,  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$  e, pela consequência da definição de produto vetorial  $|X_u \times X_v|^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 \sin^2 \theta$ . Logo, com as duas propriedades acima, podemos construir a relação:

$$|X_u \times X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2$$

(1)

Onde  $\langle X_u, X_v \rangle^2 = F(u, v)$  e  $|X_u|^2 |X_v|^2 = E(u, v)G(u, v)$ . O fato de  $|X_u \times X_v|^2$  ser um quadrado, implica que é sempre maior que zero logo a relação (1), na perspectiva dos

coeficientes da primeira forma fundamental, se resume a  $E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2 > 0$  desse modo fica concluída a demonstração.

- **Relação da primeira forma fundamental com alguns conceitos importantes**

Em D' Carmo (1976) os conceitos de comprimento de curvas, ângulo entre vetores tangentes e a área de uma superfície estão relacionados com a primeira forma fundamental. Neste trabalho, nos restringiremos a demonstrar a área em termos da primeira forma fundamental, por se tratar de uma demonstração bem

delicada. Mas de resto, o comprimento de curva e o cosseno do ângulo entre os vetores tangentes são imediatamente justificáveis.

O comprimento de uma curva pelo cálculo diferencial é dado da seguinte forma:

$\Delta t$

$$\int |\alpha'(t)| dt$$

Entretanto, observa-se naturalmente que,  $\alpha'(t)$  é naturalmente equivalente a primeira forma fundamental  $I_q(t)(\alpha'(t))$ . Logo podemos escrever:

$\Delta t$   
 $\Delta t$

$$\int |\alpha'(t)| dt = \int \sqrt{I_q(t)(\alpha'(t))} dt$$

Essa propriedade pode ser verificada facilmente pela definição da primeira forma fundamental.

O cosseno entre dois vetores tangentes a um plano é dado por:

$$\cos \theta = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{|w_1||w_2|}$$

(1)

(2)

Lembrando que,  $(w_1+w_2)$  também é tangente ao plano, temos que:

$$\langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle = |w_1|^2 + 2 \langle w_1, w_2 \rangle + |w_2|^2$$

(2)

Decorrente das relações (1) e (2) da seção 3.2, e, pela definição da primeira forma fundamental, obtemos o seguinte resultado:

$$[2\sqrt{I_q(w_1)I_q(w_2)}] \cos \theta = I_q(w_1 + w_2) - I_q(w_1) - I_q(w_2) \quad (3)$$

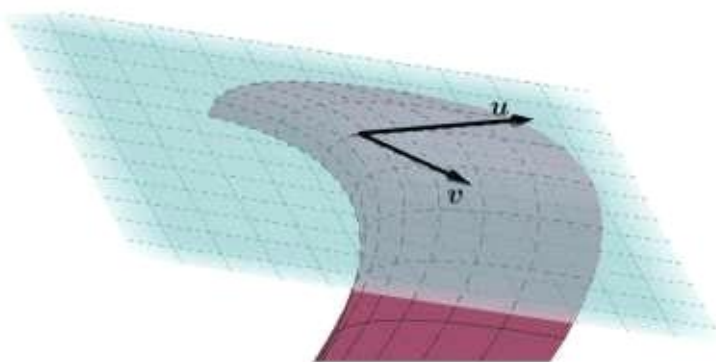
Da relação (3) da seção 3.2 podemos verificar que, se utilizarmos os vetores tangentes às curvas coordenadas<sup>6</sup> isto é,  $X_u$  e  $X_v$  e, a relação (3) pode-se chegar ao seguinte resultado:

$$E(u, v)G(u, v)\cos^2\theta = F^2(u, v)$$

Em (4), é notável que, se tratando das curvas coordenadas, se o ângulo

(4) formado pelos seus vetores tangentes for reto, então  $F(u, v) = 0$ . Em outras palavras, toda superfície em que o coeficiente F for nulo teremos que suas curvas coordenadas terão vetores tangentes ortogonais. Em D' Carmo, essas superfícies são designadas por parametrização ortogonal.

Figura 7: Vetores tangentes as curvas coordenadas



FONTE: Autor.

E por fim, falamos da área de uma superfície. Como já ressaltamos no início da secção, esse conceito não será demonstrado aqui, mas o leitor pode vê-la em muitas obras de cálculo diferencial. Dessa forma, partindo do cálculo diferencial, sabemos que a área de uma superfície é equivalente a:

A “área”  $\Delta S$  de ABCD é, então, aproximada pela área do paralelogramo de lados  $\frac{\partial \sigma}{\partial u}$  e  $\frac{\partial \sigma}{\partial v}$ :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v}$$

<sup>6</sup> As curvas coordenadas forma mencionadas na secção 1.1. Essas curvas são decorrentes da fixação de um parâmetro da superfície, isto é, seja  $X(u, v)$  essa superfície, fixando  $u = k$  (constante), obtém-se a curva  $X(k, v)$  em que o parâmetro que está variando é o  $v$ .

Nada mais natural, então, do que definir a área de  $\sigma$  por

(GUIDORIZZI,2013,  
p.211).

No entanto, na linguagem em que usamos,  $\partial u$  e  $\partial v$  são devidamente os vetores  $X$

e  $X$

$\partial v$   $\partial u$   
 $u$   $v$

respectivamente. O produto  $\| \partial u \times \partial v \|$  pode naturalmente ser representado por

$\|X_u \times X_v\|$ . Decorre de (1) da secção anterior que:

$$\|X_u \times X_v\|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2$$

Obtemos que  $\|X_u \times X_v\|^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2$  e,  
 $\|X_u \times X_v\|^2 =$

$v$   
 $E(u, v)G(u, v)$  assim como  $\langle X_u, X_v \rangle^2 = F^2(u, v)$ . Com tudo isso, podemos escrever a área da seguinte forma:

$$\text{Área} = \iint_k \|X_u \times X_v\| \, du \, dv = \iint_k \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

(5)

Com a relação (5) finalizamos a secção 3.2 para dar continuidade aos demais conceitos.

- **Segunda forma fundamental**

De forma semelhante ao que fizemos na secção anterior, destacamos mais um dos conceitos que é extremamente importante no estudo das superfícies, a segunda forma fundamental. Ela está relacionada naturalmente com a distância de um ponto  $q$  até o plano tangente a  $p$  tomando  $q$  com um ponto na região próxima de  $p$  como cita Garcia Alvarado (2006). No entanto, tomemos esse raciocínio de acordo com a linguagem que foi utilizada até o momento.

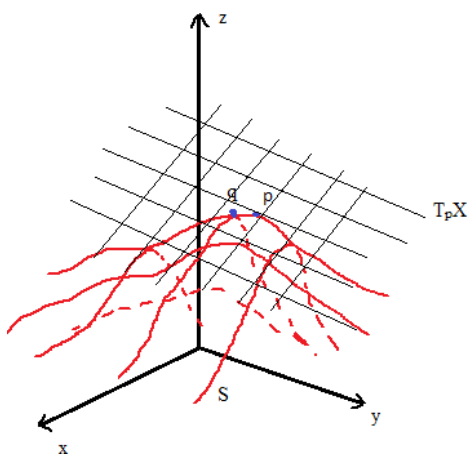
- **distância de um ponto  $q$  próximo de  $p$  em relação ao plano tangente a  $p$**

Se dada uma superfície  $X(u, v)$  e, um ponto  $p = (u_0, v_0)$ , e seja  $T_pX$  um plano tangente a  $X$  no ponto  $p$ . É fácil notar que  $T_pX$  é o plano determinado por:

$$[(x, y, z) - X(u_0, v_0)]N(u_0, v_0) = 0 \quad (1)$$

Observe que,  $N(u_0, v_0)$  é o vetor normal unitário relativo ao ponto  $p = (u_0, v_0)$ . Nosso objetivo é calcular a distância de um ponto  $q = (u_0 + k_1, v_0 + k_2)$  ao plano tangente  $T_pX$ . (ver figura 8).

Figura 8: Demonstra os dois pontos  $p$  e  $q$  de modo que  $p$  está no plano tangente, enquanto que o ponto  $q$  está apenas na superfície.



FONTE: autor.

Para isso, tomemos:

$$d = [X(u_0 + k_1, v_0 + k_2) - X(u_0, v_0)]N(u_0, v_0) \quad (2)$$

em que,  $d$  é a distância de  $q$  ao plano tangente. De uma forma mais específica, imaginamos uma curva  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  passando por  $q$  e por  $p$ . Logo teríamos  $d$  sob a forma:

$$d = [X(u(t_1), v(t_1)) - X(u_0, v_0)]N(u_0, v_0)$$

Pelo polinômio de Taylor,  $d$  pode tomar a seguinte forma:

$$(3) \quad d = [(\alpha(t_0))(\Delta t) + \frac{1}{2} \alpha''(t_0)(\Delta t)^2 + E(t)] \Delta t$$

$$(4) \quad \frac{d}{dt} = \alpha'(t_0) + \alpha''(t_0) \Delta t + \dots$$

Podemos então dizer que, a distância  $d$  é aproximadamente:

$$d \cong \alpha'(t_0) \Delta t + \frac{1}{2} \alpha''(t_0) (\Delta t)^2$$

(5) Com o limite do erro

$|E(t)|$

$(\Delta t)^2$  igual a zero quando  $(\Delta t)$  tender a zero. Desse modo,

podemos dizer que a distância  $d$  está dada de uma maneira geral pela forma quadrática:

$$(6) \quad II_p(\alpha(t)) = (\alpha''(t_0), N(t_0))$$

A relação (6) da seção 3.3.1 é também chamada de segunda forma fundamental (ALVARADO, 2006, p 76). São muitos os raciocínios que conduzem a segunda forma fundamental.

Um exemplo dessa diversidade pode ser visto em D' Carmo, (1976) que ressalta a possibilidade da segunda forma fundamental surgir simplesmente das derivadas segundas e, de sua interação com as normais a esses pontos. No entanto, não é objetivo deste estudo demonstrar os variados raciocínios que conduzem a segunda forma quadrática. Por isso, daremos continuidade demonstrando a independência de  $II_p(w)$  relativo à curva escolhida.

- **A segunda forma fundamental é independente da curva**

Provaremos a seguir que  $II_p(w)$  é independente da curva  $\alpha(t)$  isto é, qualquer que seja a curva, a segunda forma fundamental em um dado ponto é a mesma para todas as curvas da superfície que passam por esse ponto. Essa demonstração é de suma importância para o desenvolvimento do conceito de segunda forma fundamental, pois, a partir dela, será possível observar as funções diferenciáveis que fazem parte da estrutura da aplicação  $II_p(w)$ .

Para isso, tomemos  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  de modo que,  $p = (u(t_0), v(t_0))$  e

$\alpha'(t_0) = w$ . Desse modo, temos:

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t))$$

$$\text{e, } \alpha''(t) = u''(t)X_u(u(t), v(t)) + (u'(t))^2X_{uu}(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t)X_{uv}(u(t), v(t)) + (v'(t))^2X_{vv}(u(t), v(t)) + v''(t)X_v(u(t), v(t))$$

com isso, e com a equação (6) da secção 3.3.1 obtemos:

(7)

(8)

$$II_p(w) = (u'(t_0))^2 \langle X_{uu}, N \rangle (u(t_0), v(t_0)) + 2u'(t_0)v'(t_0) \langle X_{uv}, N \rangle$$

$$(u(t_0), v(t_0)) + (v'(t_0))^2 \langle X_{vv}, N \rangle (u(t_0), v(t_0))$$

(9)

Decorrente da igualdade (9) secção 3.3.2, fica demonstrada que a segunda forma fundamental não depende da curva dada, mas, ela pode variar de acordo com os pontos escolhidos, isto é, variando o parâmetro  $t$ , e conseqüentemente, variando o ponto  $p = (u(t), v(t))$  os valores de  $II_p(w)$  também variam.

Como consequência da sua definição, a segunda forma fundamental tem como principal finalidade determinar uma relação unívoca com a primeira forma fundamental. Esse será o assunto do próximo tópico.

## • CURVATURAS

Nesta secção, será destacado os conceitos de curvatura normal, curvaturas principais e curvatura de Gauss. Em contra partida, há muitos outros tipos de curvaturas, mas para este estudo, focaremos apenas nessas em questão.

### • curvatura normal

A aplicação que associa a segunda forma fundamental com a primeira em termos de uma razão é chamada de curvatura normal. Sua importância principal se deve ao fato de que esta aplicação coincide com a curvatura de uma <sup>7</sup>secção normal

da superfície por um vetor  $w$  tangente a mesma. De uma forma mais específica podemos dizer que:

$k_n$

$$= \frac{II_q(w)}{I_q(w)}$$

(1)

Como o leitor pode facilmente verificar, tanto a primeira quanto a segunda forma fundamental não dependem da curva escolhida. Nestas condições, podemos escolher arbitrariamente uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e, assim, termos que

$I_q(w) = 1$  e desse modo:

$$k_n = II_q(w) = (\alpha''(s_0), N(u_0, v_0)) = k(s_0)(n(s_0), N(u_0, v_0))$$

(2)

Em que os elementos  $k(s_0)$  e  $n(s_0)$  são a curvatura de  $\alpha(t_0)$  e o vetor normal a curva

$\alpha(s_0)$  em  $s_0$  respectivamente. A equação (2) desta seção é usada como ponto de partida para uma interpretação geométrica da segunda forma fundamental. No entanto não a faremos aqui uma vez que não é objetivo desse estudo.

- **Curvaturas principais, curvatura de Gauss**

A curvatura normal  $k_n(w)$  é uma função contínua e, por essa razão, admite valor mínimo e máximo relativos a pontos (vetores) de mínimo e máximo.

Veja a proposição:

<sup>7</sup> Uma seção normal da superfície determinada por um vetor tangente  $w$  é uma curva obtida pela interseção da parametrização local  $X(u, v)$  com um plano ortogonal a  $w$  e que contenha o mesmo. Tenenblat (2008) p 155.

**6.1 Proposição.** Sejam  $X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular e  $k_n$  a função curvatura normal de  $X$  em  $q = (u_0, v_0)$ . Então, existem vetores unitários e ortogonais  $w_1, w_2 \in T_q X$  tais que  $k_1 =$

$k_n(w_1)$  e  $k_2 = k_n(w_2)$  são os valores mínimo e máximo da função  $k_n$ .  
Tenenblat 2008. P.161.

O leitor poderá visualizar a demonstração dessa proposição na própria obra de Tenenblat. Os vetores citados  $w_1$  e  $w_2$  nas condições dessa proposição são denotados por vetores principais e, os valores  $k_1$  e  $k_2$  são chamados de curvaturas principais de  $X$  no ponto  $q$ .

### 5.3 A curvatura gaussiana

Como vimos no tópico anterior, a função curvatura normal possui valores de máximo e mínimo relativos aos vetores nas chamadas direções principais. O produto dessas curvaturas é denominado de curvatura de Gauss ou curvatura gaussiana:

$$K = k_1 k_2$$

Pode-se também expressar em função dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Provaremos mais tarde que esta curvatura definida acima só depende da primeira forma fundamental. Fato que ficou conhecido como teorema notável de Gauss.

## 6. SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL DE UMA DADA SUPERFÍCIE X

Para a teoria local das curvas, o triedro de Frenet é fundamental para a construção de uma base em  $\mathbb{R}^3$  para o estudo de uma maneira geral. Do mesmo modo, para a teoria das superfícies, usaremos a base  $\{X_u, X_v, N\}$  que tem muita importância quando estudamos curvas geodésicas e curvaturas. Desse modo temos que:

$$X_{uu} = \Gamma^1 X_u + \Gamma^2 X_v + a_{11}N,$$

11 11

(1)

$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + a_{12}N,$$

$$X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + a_{22}N,$$

$$N_u = b_{11}X_u + b_{12}X_v,$$

$$N_v = b_{21}X_u + b_{22}X_v,$$

As três primeiras equações descrevem as segundas derivadas parciais de  $X$  com relação a base  $\{X_u, X_v, N\}$ . As duas últimas equações são as primeiras derivadas parciais de  $N$  em relação a  $u$  e  $v$ .

*ij*

Os coeficientes  $\Gamma^k$  devem ser determinados em função dos coeficientes das formas fundamentais. Para isso, considera-se a produto interno das equações acima com os vetores  $X_u$  e  $X_v$ , e da mesma forma, o produto interno das três primeiras com  $N$  e por manipulação algébrica, podemos chegar nos seguintes resultados:

$$a_{11} = e, a_{12} = f, a_{22} = g$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GEu - 2FFu + FEv}{2}$$

$$\frac{2EFu - EEv - FEu}{2}$$

$$11 = ($$

$$2(EG - F^2)), \Gamma_{11} = ($$

$$2(EG - F^2)),$$

$$= ( ), \Gamma_{12}^2 = ( ),$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{GEv - FGv}{2}, \Gamma_{22}^2 = \frac{EGv - FEv}{2}$$

$$12 = \frac{2(EG - F^2)}{2}$$

$$2(EG - F^2)$$

$$\Gamma^1 \quad \frac{2GFv - GG_u + FGv}{2}$$

$$\frac{EGv - 2FEv + FG_u}{2(EG - F^2)}$$

$$22 = ($$

$$), \Gamma_{22} = ($$

$$2(EG - F^2) )$$

$$b = \left( \frac{fF - eG}{EG - F^2} \right), b$$

$$= \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right),$$

$$11 \quad EG - F^2 \quad 12$$

$$EG - F^2$$

$$b \quad gF - fG$$

$$fF - gE$$

$$21 = \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right), b_{22} = \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right)$$

Esses coeficientes sobre essa forma são fundamentais para o desenvolvimento do teorema que é objeto desse estudo, o Teorema Notável de Gauss. A próxima secção será sobre sua demonstração e será mostrado uma aplicação a Cartografia.

## 7. TEOREMA EGREGIUM DE GAUSS E SUA UTILIDADE NA TEORIALOCAL DAS SUPERFÍCIES

Vimos até o momento que a curvatura de Gauss ou curvatura gaussiana foi construída a partir da segunda forma quadrática como cita na página 207 Tenenblat, “Nesta secção (secção 9), veremos um dos teoremas mais importantes da teoria das superfícies, que afirma que a curvatura gaussiana, definida a partir da

segunda forma quadrática, depende somente da primeira forma quadrática” Tenenblat (2008). Faremos uma breve demonstração desse teorema e, descaremos como ela pode ser útil na teoria geral da relatividade.

De forma inicial devemos nos lembrar de que, dada uma superfície regular, então ela precisa conter derivadas de todas as ordens, então devem ser satisfeitas as relações:

$$(X_{uu})$$

$$v =$$

$$(X_{uv})$$

$$u$$

$$(X_{vv})$$

$$u =$$

$$(X_{uv})$$

$$v$$

$$N_{uv} = N_{vu}$$

Substituindo as relações (1) da seção 5 nas relações acima teremos que, nas três equações, estão presentes os termos da base  $X_u$ ,  $X_v$  e  $N$ . Subtraindo o lado esquerdo pelo termodado lado direito em todas as três equações, podemos agrupar os termos em função a obtê-los na base  $\{X_u, X_v, N\}$  e assim, cada coeficiente relativo a um dos vetores desta base se anulará dando origem a nove equações<sup>8</sup> nas quais três se destacam e, as demais são caso equivalentes:

$$e_v - f_u = e\Gamma^1_{12} + f(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{12}) - g\Gamma^2_{11} \quad 11$$

$$f_v - g_u = e\Gamma^1_{22} + f(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{22}) - g\Gamma^2_{12} \quad 12$$

$$-EK = (\Gamma^2)_u - \Gamma^2$$

$$+ \Gamma^1 \Gamma^2 - \Gamma^1 \Gamma^2 + (\Gamma^2)^2 - \Gamma^2 \Gamma^2$$

12 11

11 12 12

11 22

A última expressão algébrica é dita equação de Gauss onde  $K$  é a curvatura gaussiana.

A partir dela podemos exprimir o seguinte resultado:

**Teorema de Egregium de Gauss.** A curvatura gaussiana  $K$  só depende da primeira forma fundamental.

Podemos citar uma consequência imediata desse teorema, superfícies isométricas têm exatamente a mesma curvatura gaussiana em pontos correspondentes (TENENBLAT, 2008, p.208). Isso ocorre pois segundo D’Carmo (1976, p.218) superfícies isométricas preservam a primeira forma fundamental, com isso, e de acordo com o teorema acima, as superfícies que preservam a primeira forma fundamental possuem a mesma curvatura gaussiana. Tudo isso é útil para compreender fenômenos que envolvem projeções de uma dada superfície em outra incluído um caso especial a projeção cartográfica.

A equação:  $-EK = (\Gamma^2)_u - \Gamma^2$

+  $\Gamma^1 \Gamma^2 - \Gamma^1 \Gamma^2 + (\Gamma^2)^2 - \Gamma^2 \Gamma^2$  também é

12 11

11 12 12

11 22

chamada de fórmula de Gauss como cita D’ Carmo:

<sup>8</sup> Caso o leitor se interesse pela demonstração detalhada ela pode ser encontrada em D’ Carmo Differential Geometry of Curves and Surfaces p 231-234. Ou em Notas de Aula de Geometria Diferencial Biezuner R. p 118-120

A expressão acima, que produz o valor de  $K$  em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental e seus derivados, é conhecida como fórmula de Gauss. Foi provado pela primeira vez por Gauss em um famoso artigo [1].

O teorema de Gauss é considerado, pela extensão de suas consequências, um dos fatos mais importantes da geometria diferencial. (D’CARMO, 1976, p.234-235).

O mesmo também ressalta que a equação pode também ser escrita da seguinte forma:

$$(\Gamma^1)_u - (\Gamma^1)_v + \Gamma^2 \Gamma^1 - \Gamma^2 \Gamma^1 = FK$$

12 11

12 12

11 22

Observamos está expressão só é possível de  $F \neq 0$ . Continuaremos explorando as consequências do teorema de Egregium porem agora, analisando um tipo especial de curvas de modo que, podemos mostrar que se duas superfícies têm a mesma curvatura gaussiana então se estas curvas forem minimizantes, isto é, de comprimento mínimos em uma das superfícies, continuaram sendo na outra superfície, isto é, a propriedade minimizantes se preserva em superfícies com a mesma curvatura gaussiana. Para entender melhor isso, é interessante definir que curvas são essas, e por que elas são importantes para a geometria diferencial. Desde a Grécia Antiga já se sabia que a Terra não era plana de acordo com Ruggiero (2014). Isso deve as constantes observações astronômicas e marítimas. Logo esse fato de a Terra ser redonda implicava uma questão muito interessante, entre dois pontos da Terra, qual o menor caminho entre eles? Essa questão foi crucial na descoberta do número  $\pi$ . (RUGGIERO, 2014, p.34). Esta curva com o menor caminho entre dois pontos é chamada de geodésica (LIMA, 2016, p.99). no plano, as linhas (ou curvas) mais curtas, isto é, de menor caminho entre dois pontos são as retas, em outras palavras, todas as retas de um plano são geodésicas desse plano (TENENBLAT, 2008, p.196). Mostraremos agora de um modo mais formal como uma geodésica é uma curva de comprimento menor que qualquer outra curva de uma certa superfície. Faremos isso, supondo que dada uma superfície regular  $S$ , e um ponto  $p$  de tal modo que exista um plano tangente  $T_p S$  e uma vizinhança aberta  $U_r(p) = \{p - r, p + r\}$  com  $U_r(p) \subset T_p S$  e uma imagem de  $U_r(p)$  em  $S$  dada por  $B_r(p)$  chamada de bola geodésica de  $S$  segundo Lima (2016). Tomemos agora a curva geodésica  $\gamma: [a, b] \rightarrow B_r(p)$  que assume as seguintes propriedades;

$\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = w$  e  $w$  é um vetor do plano  $T_pS$ . Ainda de acordo com Lima (2016) esta aplicação  $\gamma$  nestas condições é chamada de aplicação exponencial e, é um isomorfismo. Portanto, assume uma inversa diferenciável que denotamos por  $\gamma^{-1}$ . Seja então  $\alpha(t) =$

$\gamma^{-1}(\sigma(t))$  com  $t \in [a, b]$  e  $\sigma$  é uma curva qualquer entre os dois pontos  $[a, b]$ . É fácil verificar

que escrever:

$$\alpha'(t) =$$

$$\frac{\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle}{\|\alpha(t)\|^2}$$

$$\alpha(t) + \langle \alpha'(t), \alpha^\perp(t) \rangle \alpha^\perp(t)$$

O termo  $\alpha^\perp(t)$  é ortonormal a  $\alpha(t)$ . Podemos verificar facilmente que esta equação é verdadeira observando que se entre  $\alpha(t)$  e  $\alpha'(t)$  existe um ângulo  $\theta$  então entre  $\alpha^\perp(t)$  e  $\alpha'(t)$

existe um ângulo  $(\pi - \theta)$ . Assim, fazendo o modulo de  $\alpha'(t)$  nos dois membros da equação ela

2

se verificará. Deste modo, como tomamos  $\alpha(t) = \gamma^{-1}(\sigma(t))$  então nada mais natural que

$\sigma(t) = \gamma(\alpha(t))$ . Derivando  $\sigma$  em  $t$ , obtemos  $\sigma'(t) = \gamma'(\alpha(t))\alpha'(t)$ . Com isso temos:

$$\sigma'(t) = \gamma'(\alpha(t)) \left[ \frac{\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle}{\|\alpha(t)\|^2} \right]$$

$$\alpha(t) + \langle \alpha'(t), \alpha^\perp(t) \rangle \alpha^\perp(t)$$

A partir disto concluímos que,  $\|\sigma'(t)\| \geq \frac{\langle \sigma'(t), \alpha(t) \rangle}{\|\alpha(t)\|} \geq \frac{\langle \gamma'(\alpha(t))\alpha'(t), \alpha(t) \rangle}{\|\alpha(t)\|} = d$   
 $\|\alpha(t)\|$  logo

$$\|\alpha(t)\|^2$$

$$\|\alpha(t)\|$$

$dt$

se integrando ambos os lados no intervalo  $[a, b]$  em relação a  $t$  chegamos ao seguinte resultado:

$$l_\sigma = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt \geq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

$b$   $d$

$$\|\alpha(t)\| dt = \|\alpha(b)\| - \|\alpha(a)\| = l_\gamma$$

$a$   $a$

$dt$

A última igualdade  $\|\alpha(b)\| - \|\alpha(a)\| = l_\gamma$  é devido ao fato de que  $\alpha(t) = \gamma^{-1}(\sigma(t))$  é um isomorfismo além de  $\gamma$  nas condições em que foi estabelecida é uma isometria local, isto é, preserva o comprimento (LIMA, 2016, p.102). logo fica demonstrado que a geodésica é uma curva de menor comprimento  $l_\sigma \geq l_\gamma$ . Finalmente, estamos agora determinados a mostrar como superfícies isométricas terão a mesma curvatura gaussiana e preservam as curvas geodésicas segundo Tenenblat:

Portanto, segue-se da definição 4.5 de superfícies isométricas e do fato de que as geodésicas são caracterizadas pelo sistema de equações (31) que, se duas superfícies são isométricas, então as geodésicas de uma superfície são levadas em geodésicas de outra superfícies através de isometria. (TENENBLAT, 2008, p.200)

Para isso, observaremos com detalhes alguns casos particulares, como por exemplo, as curvas mínimas de um cilindro circular têm imagens que são curvas mínimas em um plano? Observamos que, uma possível parametrização de um cilindro circular é dada por  $X(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$  com  $r > 0$  o raio entre a superfície e o seu eixo.

Segundo Tenenblat (2008), é crível estabelecer a curvatura gaussiana de  $X(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$  determinando uma direção ortogonal a ela

$n(u_0, v_0) = (X_u \times X_v)$  e derivando  $X(u, v)$  até a segunda ordem em  $u$  em seguida derivando  $X(u, v)$  em  $u$  e depois em  $v$  por fim derivando  $X(u, v)$  até a segunda ordem em  $v$ . Desse modo a curvatura gaussiana vai ser igual a:

$$K = \frac{(-r \cos u_0, -r \sin u_0, 0) \cdot (0, 0, 0)}{(\cos u_0, \sin u_0, 0)^2}$$

,  $\sin u$

,  $0) = 0$

$$|(\cos u_0, \sin u_0, 0)|^4 = 0$$

Assim, a curvatura gaussiana de um cilindro é nula em qualquer dos seus pontos. Sabemos também que a curvatura de Gauss da faixa de plano é nula  $K = 0$  segundo Tenenblat:

Se  $X$  é uma superfície parametrizada regular que descreve um plano, já vimos que a curvatura normal em qualquer ponto é identicamente nula, portanto, as curvaturas principais são  $k_1 = k_2 = 0$  e todo vetor unitário é um vetor principal. Concluímos que a curvatura gaussiana e a curvatura média são identicamente nulas. (TENENBLAT, 2008, p.163).

Partindo disso, e observando que pelo Teorema de Egregium de Gauss, a curvatura gaussiana  $K$  só depende da primeira forma fundamental por inferência temos que superfícies com a primeira forma fundamental que coincide possuem a mesma curvatura gaussiana, portanto são superfícies isométricas que preservam as geometrias intrínsecas, isto é, preservam, área, ângulos, comprimentos, e qualquer outra propriedade intrínseca. Desta forma as curvas geodésicas do cilindro circular se preservam ao ser levadas para o plano em outras palavras, as curvas de comprimento mínimo no cilindro circular são imagens de retas no plano. Mostraremos isso provando que se usarmos qualquer curva de comprimento mínimo no cilindro circular, ela terá como imagem no plano uma reta e, reciprocamente, qualquer reta de uma faixa de plano haverá uma imagem com comprimento mínimo no cilindro circular.

Já sabemos que uma possível parametrização do cilindro circular é dada por  $X(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$  e que segundo D’Carmo (1976) os

meridianos, os paralelos e as hélices circulares são as únicas geodésicas do cilindro circular veja na figura 9:

Figura 9: Para uma reta de uma faixa de plano, a sua imagem no cilindro circular é uma geodésica que corresponde a uma hélice circular.

FONTE: D’Carmo (1976) p. 247. Se trata de figura 4-15. Geodésicas em um plano.

Faremos a constatação empírica dessa ideia tomando uma hélice circular contida no cilindro  $X(u, v)$  tal como  $\alpha(t) = (r \cos(at + u_0), r \sin(at + u_0), ct + v_0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , com  $a$  e  $b$  constantes não-nulas. Essa curva é claramente uma hélice circular segundo Tenenblat (2008). Além disso, podemos notar que existe uma aplicação  $\mu$  que relaciona os parâmetros da

superfície em relação a  $t$  na forma  $(u, v) \xrightarrow{\mu} (at + u_0, ct + v_0)$  que claramente é uma reta que

contém o ponto  $(u_0, v_0)$  pois se  $u = at + u_0$

$$e v = ct + v_0 \text{ então } \frac{u - u_0}{a} = \frac{v - v_0}{c} \text{ logo } v = \frac{c}{a}(u - u_0) + v_0$$

$$(u - u_0) c$$

+ v

ou ainda,

$$\frac{c}{a} (u - u_0) + v_0 = v$$

$u + v$

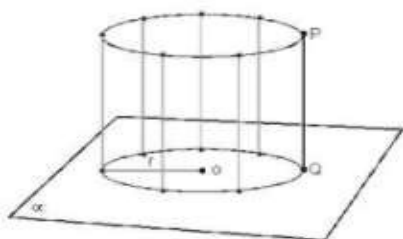
que é uma reta. Deste modo,

$$v = u \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} + k$$

a aplicação que conduz  $(at + u_0, ct + v_0)$  aos pontos  $(r \cos(at + u_0), r \sin(at + u_0), ct + v_0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é uma isometria local que preserva as geodésicas.

Tomemos agora a seguinte situação, seja  $\beta(t) = (r \cos u_0, r \sin u_0, ct + v_0)$  vemos que esta curva é um meridiano no cilindro circular como mostra a figura 10.

Figura 10: cilindro circular equilátero. As retas paralelas a  $(PQ)^-$  são meridianos



FONTE: FONTE: <https://www.colegioweb.com.br>

E igualmente, como fizemos demonstrando que qualquer curva geodésica no cilindro circular tem como imagem uma reta, faremos agora a demonstração de que qualquer reta no plano terá imagem, uma hélice circular, meridiano ou paralelos por que são superfícies isométricas e possuem a curvatura gaussiana. Para isso, tomemos uma reta qualquer do plano

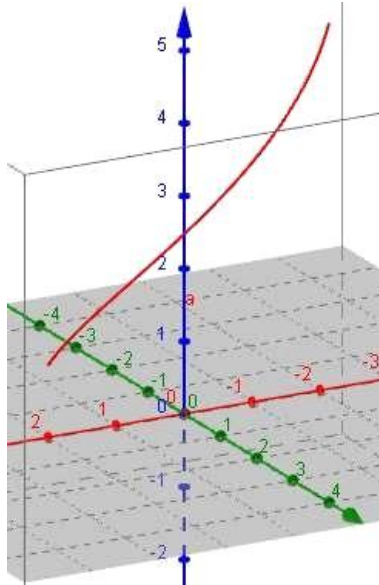
sob a forma  $\{ u = \cos^{-1} t$

$$v = 2 \cos^{-1} t + 1$$

para um cilindro circular de raio  $r$  temos a seguinte curva

$\beta_1(t) = (rt, r\sqrt{1 - t^2}, 2 \cos^{-1} t + 1)$  que está contida nele. E  $\beta_1$  é uma hélice circular como mostra a figura 11:

Figura 11: A curva  $\beta_1$  definida para  $r=2$  feito no GeoGebra é uma hélice circular



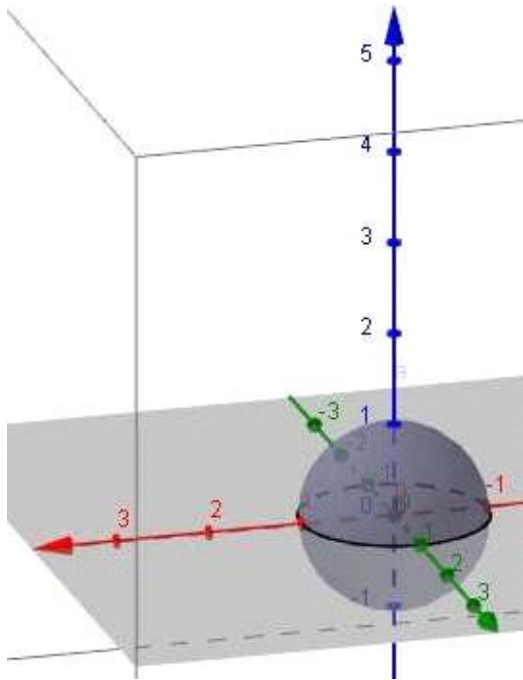
FONTE: AUTOR

Observamos que qualquer cilindro circular de raio  $r = 2$  contém esta curva. Portanto, isso confirma o que queríamos ver, qualquer curva de comprimento mínimo no cilindro circular será uma reta no plano e, qualquer reta no plano será uma geodésica no cilindro circular. Veremos de uma forma semelhante se as curvas mínimas de uma esfera serão mínimas no plano ou não. Para isso, tomemos uma parametrização local segundo Tenenblat (2008)  $X(u, v) = (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, a \sin v)$  com  $a > 0, u \in \mathbb{R}, 0 < v < \pi$ . As curvas de comprimento mínimo de uma esfera são as circunferências máximas como cita Ruggiero (2014):

Na esfera  $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ , as únicas curvas cuja aceleração é sempre perpendicular à esfera são as circunferências máximas de raio  $r$  contidas na esfera, parametrizadas com velocidade constante. Com efeito, observar que as circunferências máximas são as únicas curvas planas contidas na esfera cujos vetores normais (como curvas em  $\mathbb{R}^3$ ) são perpendiculares à esfera. (RUGGIERO, 2014, p.41).

Uma circunferência máxima na esfera pode ser dada por  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$  é uma curva de comprimento mínimo na esfera e também é circunferência máxima, isto é, se tratada uma curva que coincide com o centro da esfera Biezuner (2019). Como veremos na figura 12:

Figura 12: esfera de raio  $r=1$  com uma circunferência máxima com origem coincidindo com a origem da esfera.



FONTE: Autor

De acordo com o teorema de Gauss como a esfera e o plano não são isométricos de uma maneira geral suas curvaturas gaussianas serão distintas, de fato a da esfera é  $K = 1$

a2

Tenenblat (2008) e já vimos que a curvatura de um plano é  $K = 0$  então eles não possuem uma isometria que preserve suas formas intrínsecas, logo por inferência, chegamos ao fato de que ambas esfera e plano não preservam as propriedades que dependem da primeira forma fundamental. Isso pode ser facilmente observado segundo Lima:

(INVARIÂNCIA DO COMPRIMENTO POR ISOMETRIAS). Sejam  $f :$

$S_1 \rightarrow S_2$  uma isometria local entre superfícies regulares,  $S_1$  e  $S_2$ , e  $\alpha : I \rightarrow S_1$  uma curva parametrizada regular. Então,  $f \circ \alpha : I \rightarrow S_2$  é uma curva parametrizada regular e, para todo intervalo  $[a, b] \subset I$ , vale a igualdade:

$$L_a^b(f \circ \alpha) = L_a^b(\alpha).$$

(LIMA, 2016, p.97).

Isso simplesmente significa que superfícies isométricas preservam o comprimento, enquanto que, se as mesmas não o forem, elas não conservam as suas extensões. Esse fato, portanto, ocorre com a esfera.

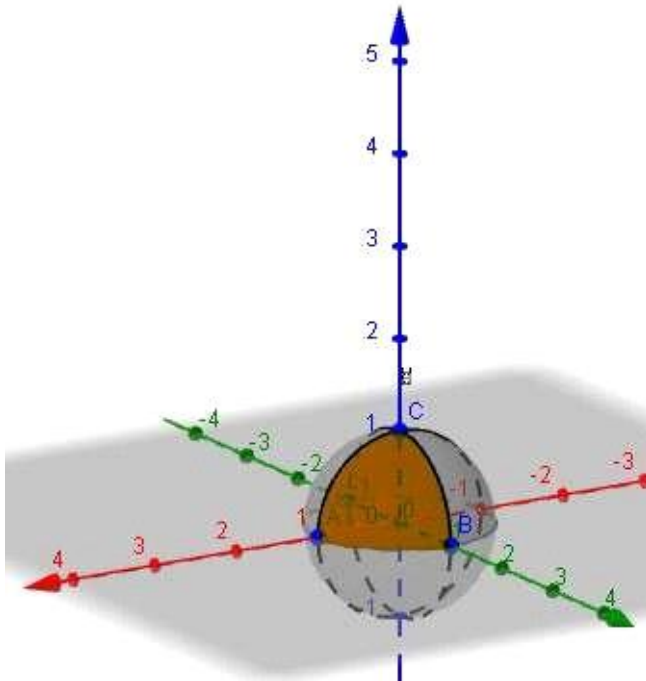
Além disso, devemos lembrar que a isometria depende somente dos coeficientes da primeira forma fundamental como cita Tenenblat (2008) complementando Lima (2016):

Sejam  $X(u, v)$  e  $\bar{X}(u, v)$ ,  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ , superfícies simples. Dizemos que  $X$  e  $\bar{X}$  são superfícies *isométricas* se, para todo  $(u, v) \in U$ , os coeficientes da primeira forma quadrática de  $X$  e  $\bar{X}$  coincidem, isto é,  $E(u, v) = \bar{E}(u, v)$ ,  $F(u, v) = \bar{F}(u, v)$ ,  $G(u, v) = \bar{G}(u, v)$ . (TENENBLET, 2008, P.144)

No caso de superfícies que não são isométricas de uma forma geral ou local esse fato não ocorre.

Com base em tudo isso, é conveniente preferir que uma esfera nunca será perfeitamente desenrolada em uma faixa de plano, isso decorre do fato de que, como já citamos, ambas as superfícies, não são isométricas, logo não possuem a mesma curvatura gaussiana pois como é dito pelo teorema notável de Gauss, a curvatura gaussiana só depende da primeira forma fundamental. Desse modo, qualquer propriedade intrínseca da esfera seja comprimento, ângulos, áreas, ao fazer o transporte para uma faixa de plano esses elementos não são preservados. Vejamos a seguinte situação:

Figura 13: triangulo na esfera de raio unitário.



FONTE: Autor

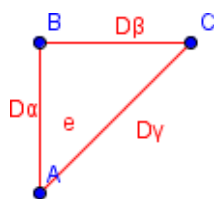
A esfera ilustrada na imagem, contém um triângulo que é conhecido como triângulo geodésico como cita Lima, (2016):

Um triângulo geodésico numa superfície regular  $S$  é um subconjunto  $\Delta$  de  $S$ , o qual é homeomorfo a uma bola fechada de  $\mathbb{R}^2$  e cujo bordo,  $\partial\Delta$ , é o traço de uma curva contínua  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ , a qual tem as seguintes propriedades:[...] (LIMA,2016, p.114)

Neste caso, a superfície  $S$  no qual Lima (2016) se refere, será a esfera, no entanto, um triângulo geodésico, como foi dito na definição, existe em qualquer superfície. No triângulo da figura 13 podemos ver que as curvas que o delimitam são  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0), \beta(t) =$

$(0, \cos t, \sin t)$  e  $\gamma = (\cos t, 0, \sin t)$  definidas em  $[0, \pi]_2$  isto é, ambas tem domínio em um segmento de um plano de comprimento  $\pi$  dessa forma, podemos tomar os domínios dessas curvas de modo a formar um triângulo equilátero como mostra a figura 14

Figura 14: Representação dos domínios das curvas no plano



FONTE: Autor

As notações  $D\alpha$ ,  $D\beta$  e  $D\gamma$  são respectivamente os domínios das tais curvas  $\alpha$ ,

$\beta$  e  $\gamma$  cujos seus comprimentos são  $\pi$  assim temos que, a área desse triângulo é

$\frac{\pi^2\sqrt{3}}{4}$  por se tratar de um

2

8

triângulo equilátero. Por outro lado, a área do triângulo contido na esfera da figura 14 é  $\frac{\pi^2}{8}$  visto

2

que se trata da  $\frac{1}{8}$  parte da esfera cuja área é  $4\pi r^2$  com  $r = 1$ . Portanto, as duas áreas não coincidem, isto é, a área, como queríamos verificar de modo particular, não se preserva ao trazer as curvas  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  de volta aos seus domínios. Pode-se constatar isso de vários outros modos, isto é, analisando os ângulos internos desse triângulo, ou outras curvas particulares contidas na esfera ou transportá-las para o plano. Entretanto isso não é necessário, pois o próprio teorema de Eggerium assim como os conceitos de isometria e as propriedades intrínsecas das superfícies são condições naturalmente necessárias para se certificar de que neste caso as características essenciais da esfera não se mantem pela condução ao plano. Estamos agora prontos para responder se uma folha de papel plana pode ser moldada a formar uma esfera porém sem amá-la, e a resposta é não pois como vimos no decorrer da pesquisa a curvatura de um plano é nula enquanto que a da esfera é uma constante positiva e como uma superfície só se desdobra em outra se ambas forem isométricas o fato de terem curvatura diferente em todos os seus pontos garante que ambas não mantêm distâncias, ângulos e nem áreas. Portanto não é possível fazer uma folha plana se moldar de forma esférica. Outra pergunta que poderíamos responder de modo relacionado é se existe um mapa plano da Terra que preserva distâncias? E a resposta também é não, pela mesma razão pela qual não podemos fazer um plano se moldar a uma esfera também não podemos deformar

uma esfera a uma superfície plana pois suas curvaturas gaussianas são distintas em todos os seus pontos.

Esse fato pode ser aplicado diversas vezes a outros tipos de superfícies, isto é, podemos prever de modo simples se algumas projeções são realmente possíveis ou se não podem ser realizadas dentro de uma certa situação.

## **CONCLUSÃO**

Em poucos aspectos, apresentamos as bases da geometria diferencial, um dos conceitos recentes da matemática, abordamos de modo simples todos os princípios mais importantes que serviram de base metodológica para encontrarmos a resposta sob a qual tanto queríamos ao longo deste estudo que é mostrar como algumas superfícies não podem ser perfeitamente projetadas em outras mais especificamente, como uma esfera não se desenrola em uma faixa de plano. Nos certificamos disso através das muitas contribuições bibliográficas na qual nos respaldamos para construir esse conhecimento. Em outras palavras, todos os nossos estudos fundamentados em autores de obras científicas como livros, revistas, artigos e monografias foram de suma importância para deparar-nos com a chave do nosso problema.

Entretanto, claro que não se pode deixar de ressaltar que, a geometria diferencial apresenta uma gama extensa de conteúdo, de conhecimentos não abordados neste trabalho como por exemplo, a teoria global das superfícies, no qual trabalha-se com o tensor de Riemann que auxilia na análise geométrica em dimensões maiores que a terceira dimensão fundamental para a construção das geometrias não euclidianas e serviu de apoio para a teoria da relatividade geral de Einstein. Outrossim, de um certo modo, há noções ainda não exploradas assim como em toda matemática que precisam ser discutidas e avaliadas de uma forma mais abrangente. Podemos desse modo, tratar desses assuntos em trabalhos futuros.

## REFERÊNCIAS

Mackiw, G. A Note on the Equality of the Column and Row Rank of a Matrix, *Mathematics Magazine*, Vol. 68, No. 4 (Oct., 1995), p. 285-286.

Wardlaw, W. P., Row Rank Equals Column Rank, *Mathematics Magazine*, Vol. 78, No. 4 (Oct. 2005), p. 316-318.

B. O'NEILL: **Elementary Differential Geometry**. Academic Press (1966).

GUIDORIZZI, H. **Um Curso de Cálculo**. 5 ed. Rio de Janeiro 2016.

ÁVILA, Geraldo. **Arquimedes, o rigor e o método** 1 ed (1986).

STEINBRUCH, A- WINTERLE, P, **Álgebra Linear**. 2. ed São Paulo 1987  
PersonMakron Books.

ÁVILA, G. **Cálculo das funções de uma variável**. 7. ed. São Paulo: LTC ,  
Vol. 1, 2003.

TENEBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. 2 ed. revisada-São Paulo  
2008.

LIMA, R. **Introdução à geometria diferencial**. 1 ed. 2016 Macapá.

RUGGIERO, R. **Geodésicas em superfícies de  $\mathbb{R}^3$ , 2014** uma introdução III  
o Colóquio de Matemática da Região Sul, Florianópolis SC.

CARMO, D. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. 1976. Instituto  
de Matemática pura e aplicada Rio de Janeiro Brasil.

STEWART, J. **Cálculo**. 7 ed. vol. 1 e 2 - - São Paulo – Cengage Learning, 2013.

BIEZUNER, R. **Notas de Aula Geometria Diferencial**. Programa de pós-  
graduação em matemática 1º de agosto 2019.