

## **UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA A DEDUÇÃO DO VOLUME DE SÓLIDOS COM A UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS CONCRETOS E DE BAIXO CUSTO**

Tiago Eutiquio Lemes Santana

IFRO - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia – *Campus Cacoal*  
Departamento de Pesquisa, Inovação e Pós-Graduação  
tiagoeutiquio@gmail.com

Eder Regiulli Dias

IFRO - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia – *Campus Cacoal*  
Departamento de Pesquisa, Inovação e Pós-Graduação  
eder.dias@ifro.edu.br

Claudemir Miranda Barboza

IFRO - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia – *Campus Cacoal*  
Departamento de Pesquisa, Inovação e Pós-Graduação  
claudemir.barboza@ifro.edu.br

### **RESUMO**

A geometria espacial é um tema muito rico na matemática, favorável à utilização de metodologias diferenciadas que possibilitam a abordagem de problemas de forma concreta, que posteriormente são levados à abstração quando se introduz as fórmulas. Optamos por desenvolver esse trabalho diante da dificuldade em encontrar ferramentas que proporcionassem uma dedução intuitiva das fórmulas de volume dos prismas, cilindros, pirâmides, cones e esferas, pois pensamos em oferecer algo palpável para o professor trabalhar tal tema de modo a facilitar as dificuldades encontradas devido à carência de materiais didáticos adequados na maioria das escolas. O presente artigo aborda um roteiro de confecção de materiais concretos com baixo custo que é facilmente encontrável na maioria das papelarias e ainda uma proposta didática de como aplicá-los em sala de aula.

**Palavras-chave:** Geometria espacial; Materiais concretos; Sólidos; Volume.

### **ABSTRACT**

Spatial geometry is a very rich subject in mathematics, favorable to the use of different methodologies that allow to approach problems in a concrete way and which are later taken to abstraction when introducing formulas. We chose to develop this work in view of the difficulty in finding tools that would provide an intuitive deduction of the volume formulas of prisms, cylinders, pyramids, cones and spheres, as we thought of offering something palpable for the teacher to work on this theme in order to facilitate the difficulties encountered due to the lack of adequate teaching materials in most schools. This article discusses a script for making low-cost concrete materials that is easily found in most stationery and a didactic proposal on how to apply them in the classroom.

**Keywords:** Spatial geometry; Concrete materials; Solids; Volume.

## 1. INTRODUÇÃO

Pretende-se deduzir o volume da esfera utilizando materiais concretos, mas para isso é necessário entender o volume dos prismas, pirâmides, cilindros e cones. Com a experiência adquirida no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e no Programa Residência pedagógica, notamos que nas escolas em que atuamos não possuíam materiais adequados que possibilita-se o uso de metodologias diferenciadas, e que essa poderia ser a realidade de outras escolas. Decidimos desenvolver materiais manipuláveis e de baixo custo, para que fosse possível a sua utilização em sala de aula, ressaltamos que foi dedicado empenho em tornar a construção dos mesmos a mais clara e acessível possível.

Optamos em realizar a dedução dos sólidos geométricos com a utilização de materiais concretos por entender a dificuldade que os professores muitas vezes têm em abordar esse conteúdo sem recorrer a memorização de fórmulas, que os alunos geralmente decoram, fazem a prova e depois esquecem, considerando que as mesmas podem ser estabelecidas de maneira mais prazerosa, com a utilização de materiais manipuláveis, de modo a desenvolver o raciocínio lógico matemático de forma intuitiva, que é um processo que fundamenta o pensamento abstrato. Para tanto, iremos construir os materiais, realizar os experimentos, utilizar a observação e o raciocínio lógico para enfim deduzir as fórmulas do volume dos sólidos geométricos.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A geometria espacial é um campo muito rico na matemática, passível de metodologias diferenciadas que abordem problemas concretos que posteriormente são direcionados para a abstração com a inserção de fórmulas. O desafio é como incluir os métodos e regras de modo que o aluno exerça o pensamento crítico sobre tal informação, resultando em uma aprendizagem significativa, contrária à concepção de simplesmente decorar, realizar a prova e depois esquecer. Uma dentre as alternativas é explicar o surgimento das fórmulas e a razão delas serem como são.

As demonstrações puramente algébricas tornam-se por muitas vezes complicadas e exaustivas quando aplicada com alunos do ensino básico. Por esse motivo, buscou-se a inserção de elementos que tornem a explicação algo intuitivo e dinâmico, no entanto, como ensinar à dedução do volume de sólidos de uma maneira simples? Esse questionamento permeou o pensamento dos autores, a fim de encontrar um caminho eficaz, optou-se em criar e utilizar materiais de baixo custo construídos especificamente para essas demonstrações,

dado o fato que geralmente as escolas não possuem recursos adequados, conforme os PCN+(2002):

Possivelmente não existem livros didáticos e laboratórios didáticos “perfeitamente adequados” ou ideais que possam ser “adotados” para percursos tão variados, capazes de atender a cada realidade escolar nesse contexto de reforma. Até por isso, seria altamente recomendável que cada escola produzisse novos materiais, com improvisações, com elementos de baixo custo e, o que é mais fundamental, com a contribuição da comunidade escolar, especialmente dos alunos. (BRASIL, 2002, p. 136).

Com a utilização de materiais concretos anseia-se em proporcionar maior assimilação dos conceitos, possibilitando aos alunos compreender e visualizar os fatores relacionados ao cálculo do volume, para que posteriormente seja possível o desenvolvimento de estratégias e a organização de informações que possibilite a resolução de problemas propostos, pois por meio da manipulação de objetos se torna mais fácil a compreensão de temas considerados abstratos, como destaca Lorenzato (2006):

É muito difícil, ou provavelmente impossível, para qualquer ser humano caracterizar espelho, telefone, bicicleta ou escada rolante sem ter visto, tocado ou utilizado esses objetos. Para as pessoas que já conceituaram esses objetos, quando ouvem o nome do objeto, sem precisarem dos apoios iniciais que tiveram dos atributos; tamanho, cor, movimento, forma e peso. Os conceitos evoluem com o processo de abstração; a abstração ocorre pela separação. (LORENZATO, 2006, p.22)

Além de que, se quisermos despertar o interesse genuíno dos alunos pela matemática, devemos buscar alternativas que deixem as aulas mais interessantes e palpáveis, mostrando que a matemática não se reduz a apenas papel e lápis, de modo que haja a união entre teoria e prática, pois “a teoria sem a prática vira verbalismo, assim como a prática sem teoria vira ativismo, no entanto, quando se une a prática com a teoria tem-se a práxis, a ação criadora e modificadora da realidade” (FREIRE,1996, p.24), junção extremamente necessária para possibilitar a aprendizagem significativa, que em suma é a aprendizagem que realmente tenha sentido para o educando, de maneira que ele seja capaz de se apropriar com maior proveito dos conteúdos e desse modo obtenha conhecimento. Segundo a teoria de Ausubel (1982):

Na aprendizagem significativa há três vantagens essenciais em relação à aprendizagem memorística. Em primeiro lugar, o conhecimento que se adquire de maneira significativa é retido e lembrado por mais tempo. Em segundo, aumenta a capacidade de aprender outros conteúdos de uma maneira mais fácil, mesmo se a informação original for esquecida. E, em terceiro, uma vez esquecida, facilita a aprendizagem seguinte – a “reaprendizagem”, para dizer de outra maneira. A explicação dessas vantagens está nos processos específicos por meio dos quais se produz a aprendizagem significativa onde se implica, como um processo central, a interação entre a estrutura cognitiva prévia do aluno e o conteúdo de aprendizagem. (AUSUBEL, 1982, p. 58)

Diante do supracitado, os professores devem escolher cuidadosamente as metodologias a serem abordadas, evitando a memorização e incentivando a construção do

conhecimento, pois “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades para a sua produção ou a sua construção” (FREIRE,1996, p.24).

### 3. METODOLOGIA DE TRABALHO

Será feito uma definição de prismas e cilindros com a discussão sobre conceito de volume, em seguida será explicado como construir cada material, utilizando, lápis, papel milimetrado, régua, tesoura, transferidor, compasso, papel cartão, cola e realizaremos experimentos com feijões. Também apresentaremos no item [4.2] o volume das pirâmides e cones, no item [4.3] apresentaremos o que para os autores é o ponto culminante desse trabalho, a demonstração e definição do sólido mais belo, a esfera. As construções podem ser realizadas juntamente com os alunos em uma sala de aula, no entanto é indispensável que os mesmos já tenham aprendido o cálculo da área de figuras planas, tais como o quadrado, retângulo, triângulo, pentágono e círculo. Não temos a intenção de apresentar receitas prontas e acabas, mas sim ideias flexíveis, pois toda a teorização se dá em ambiente ideal e a prática é como um mergulho no desconhecido (D´AMBROSIO, 2012, p. 73), desse modo são ideias que podem ser mudadas e adaptadas.

### 4. VOLUME

Volume é o espaço que determinado sólido ocupa, que pode ser quantificado por meio de cubos. Por exemplo, quando afirmamos que o paralelepípedo da figura [1] possui 24 unidades cúbicas de medida de volume, significa o mesmo que dizer que cabem 24 cubinhos de 1 unidade de medida de aresta dentro do prisma, e por isso colocamos o símbolo unidades<sup>3</sup> (lê-se unidades cúbicas).

**Figura 1:** Paralelepípedo com cubos dentro



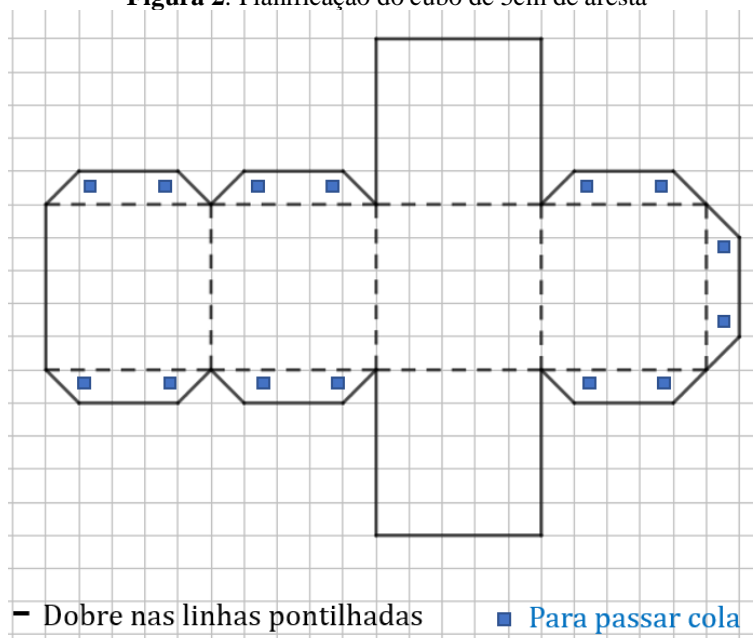
Fonte: Autores

#### 4.1. VOLUME DOS PRIMAS E CILINDROS

Prismas são sólidos geométricos cuja as bases em forma de polígonos são congruentes e paralelas, além de todas as faces laterais serem retangulares. A classificação dos prismas ocorre em razão de sua base, podendo ser prisma de base triangular, prisma de base quadrada (Paralelepípedo ou cubo), prisma de base pentagonal e assim por diante (GIOVANNI & BONJORNO, 2005, p. 255). Prismas de base quadrada ou retangulares simplificam a compreensão sobre o cálculo do volume já que é possível a visualização da quantidade de cubos que cabem nesses sólidos ou fração de cubos de 1 *cm* de unidade de medida, logo basta calcular o produto da área da base pela altura em função da medida de unidade utilizada (milímetro, centímetros, metros, etc.), porém ao avançarmos para outras bases percebemos que a dedução do volume torna-se complexa visto que os ângulos internos entre as faces laterais não formam 90°, impossibilitando posicionar cubos no interior do sólido de modo a preencher todo o espaço interno do mesmo.

Para construir o paralelepípedo ilustrado na figura [1] e os 24 cubos, inicialmente desenhe cada planificação do cubo que possui 5*cm* de aresta em papel milimetrado, conforme o especificado abaixo, cole em papel cartão e monte, atividade que pode ser proposta para se realizar juntamente com os alunos.

**Figura 2:** Planificação do cubo de 5*cm* de aresta

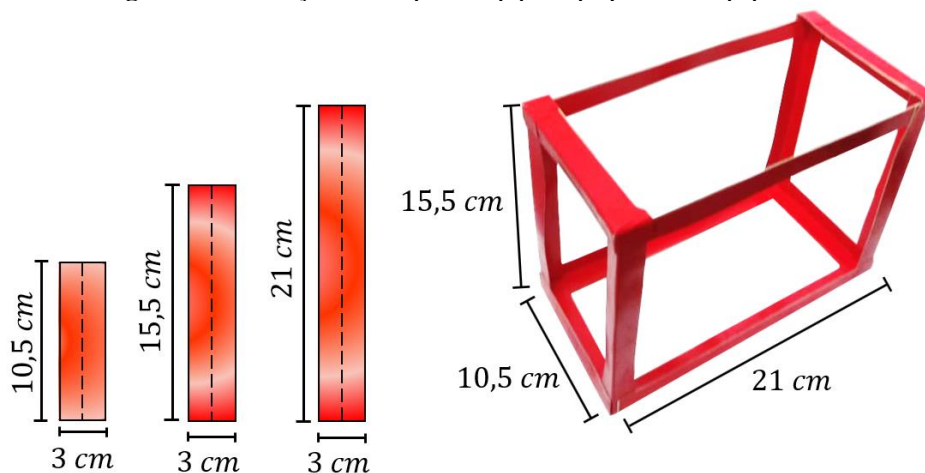


Fonte: Autores

Para fazer o paralelepípedo que irá conter os 24 cubinhos, usaremos tiras de papel cartão com 3*cm* de largura dobradas ao meio, que representarão as arestas, sendo 8 de cada tamanho. Depois de cortada as tiras iremos reforçar colando uma na outra em grupo de duas.

Desse modo ficaremos com 4 tiras de cada tamanho. Para finalizar será necessário colar conforme o ilustrado na figura abaixo:

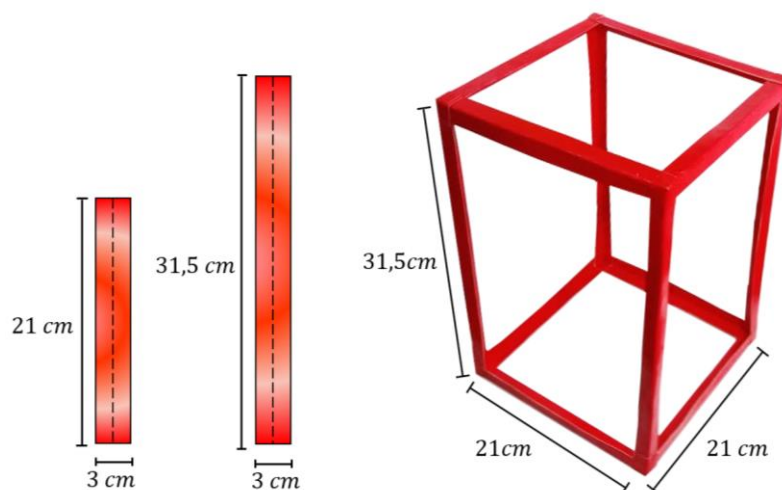
**Figura 3:** Construção de um paralelepípedo pequeno com papel cartão



Fonte: Autores

Com os materiais da figura [2] e [3] construídos, o professor pode convidar um aluno para ir à frente da classe colocar e contar a quantidade de cubos que cabem dentro do paralelepípedo. Pode-se então, provocá-los da seguinte forma; mas e se for um prisma maior? Será que precisaremos preencher totalmente com cubinhos para saber o volume? No intuito de que o aluno explore esse questionamento, será necessário construir mais 21 cubinhos cuja planificação encontra-se na figura [2] para investigarmos o paralelepípedo da figura [4], para isso faremos arestas de tiras de papel cartão, todas com 3 cm de largura, sendo 8 com 21 cm de comprimento e 8 com 31,5 cm de comprimento. Depois de cortadas, devem ser dobradas ao meio e coladas uma na outra em grupo de duas, desse modo, ficaremos com 4 arestas de cada tamanho, que deverão ser usadas para montar o prisma conforme o especificado na figura [4].

**Figura 4:** Construção de um paralelepípedo maior com papel cartão



Fonte: Autores

Com a manipulação dos objetos, deve-se mediar para que a classe conclua que para calcular o volume do paralelepípedo maior, basta saber a quantidade que preenche a base e quantas camadas iguais à base conseguiremos colocar dentro do prisma. Exemplo, sabemos que cabem 16 cubos em sua base, agora basta saber a quantidade de cubinhos que cabem em sua altura, nisso iremos descobrir quantas camadas de 16 cubinhos é possível formar dentro do prisma, no nosso caso 6, logo cabem  $16 \times 6 = 96$  cubinhos.

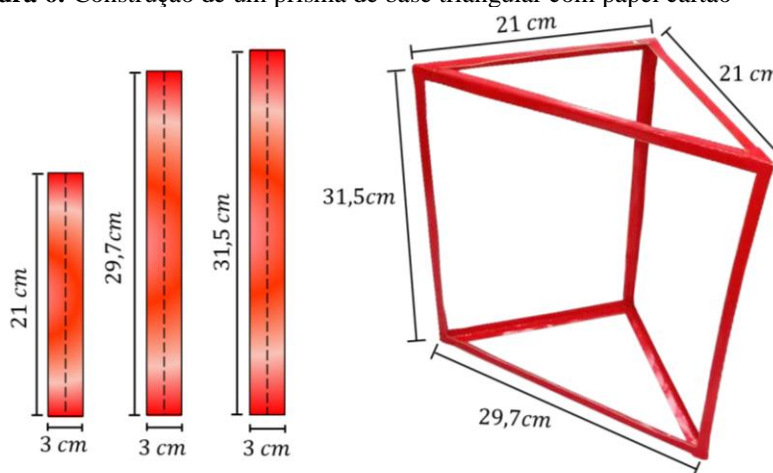
**Figura 5:** Preenchimento de um paralelepípedo maior com cubinhos



Fonte: Autores

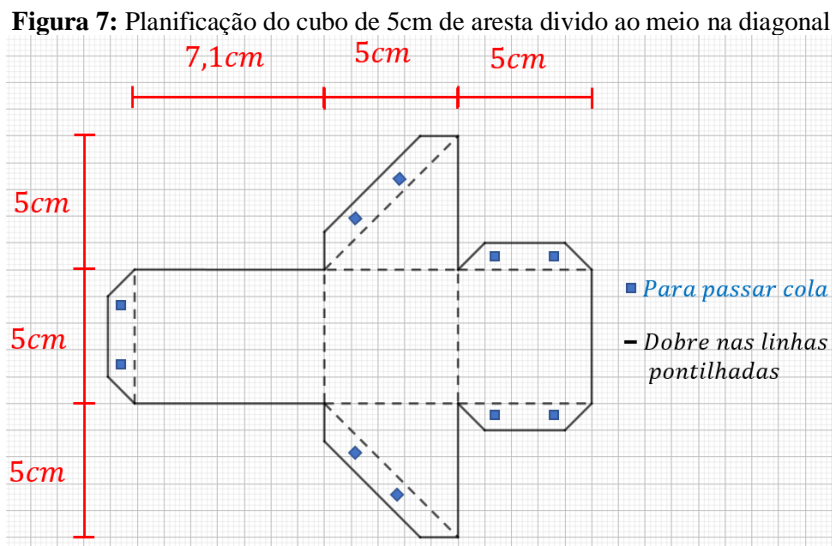
Mas, e se o prisma não tiver uma base retangular? Utilizando um prisma de base triangular podemos instigar a turma a responder esse questionamento. Para construir as arestas usaremos tiras de papel cartão, todas com 3 cm de largura, sendo 8 com 21cm de comprimento, 6 com 31,5cm de comprimento e 4 com 29,7cm de comprimento. Depois de cortadas devem ser dobradas ao meio e coladas uma na outra em grupo de duas e em seguida usadas para montar o prisma conforme o especificado na figura [6].

**Figura 6:** Construção de um prisma de base triangular com papel cartão



Fonte: Autores

Para o preenchimento do sólido da figura [6] será necessário construir 11 cubinhos cujo planificação encontra-se na figura [2] e prismas, cuja planificação está especificada na figura [7], esses representarão os 4 cubos divididos na diagonal.



Fonte: Autores

Com a manipulação dos materiais será perceptível que para o cálculo do volume o mesmo raciocínio pode ser aplicado a prismas cuja as bases não sejam retangulares, pois basta saber quantos cubinhos são necessários para preencher a base e a quantidade de camadas que é possível formar dentro do prisma

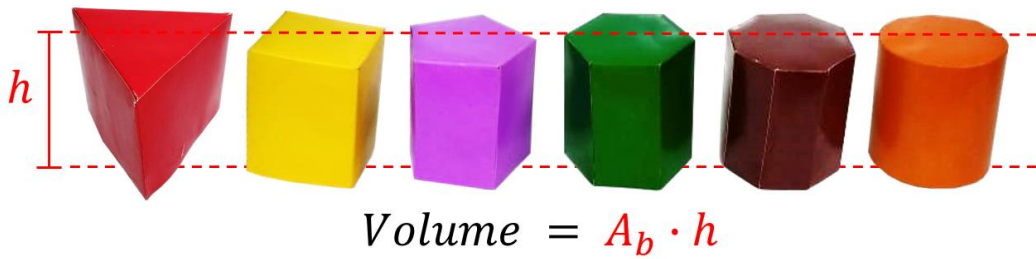
**Figura 8:** Preenchimento de um prisma de base triangular com cubinhos



Fonte: Autores

Como ter certeza sobre a quantidade de cubinhos que cabem na base? Basta calcular a área da base em função dos cubinhos. No prisma da figura [8], a base é um triângulo retângulo, em que cabem 4 cubinhos no comprimento e 4 na altura, utilizando a fórmula da área de um triângulo, temos que cabem  $\left(\frac{4 \times 4}{2}\right)$  ou seja 8 cubinhos na base do sólido. Podemos calcular o volume de qualquer prisma utilizando o mesmo raciocínio; área da base ( $A_b$ ) multiplicado pela altura ( $h$ ), inclusive o cilindro que é um caso particular de prisma.

**Figura 9:** Volume dos prismas e cilindros



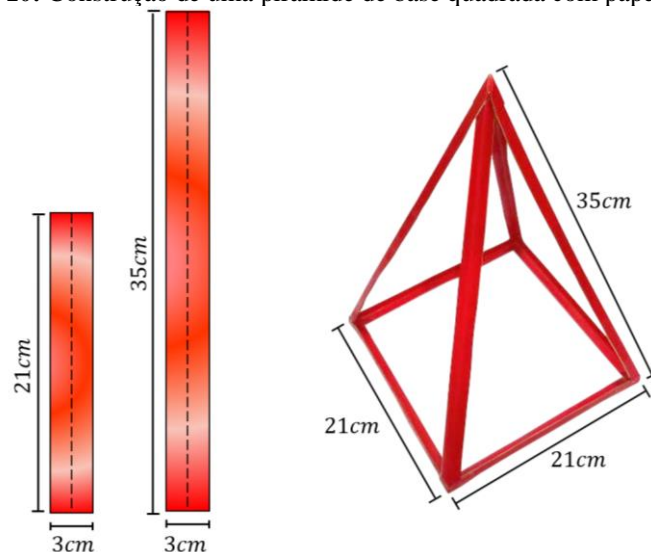
Fonte: Autores

Vale ressaltar que os cilindros possuem bases circulares e essas possuem área  $\pi \cdot r^2$ , onde  $r$  é o raio do círculo, se multiplicamos isso pela altura ( $h$ ) de um cilindro, teremos  $\pi r^2 h$ , que é a expressão que usualmente utiliza-se para determinar o volume de um cilindro.

#### 4.2. VOLUME DAS PIRÂMIDES E CONES

Pirâmides são sólidos construídos a partir de uma base e um ponto (chamado vértice) fora do plano onde se encontra essa base, de acordo com o polígono da base as pirâmides podem ser triangulares, quadrangulares, pentagonais e assim por diante (GIOVANNI & BONJORNO, 2005, p. 272). Mas será que é possível colocar cubos dentro do sólido para então calcular o volume? Para responder a essa pergunta iremos construir uma pirâmide de base quadrada utilizando tiras de papel cartão de  $3\text{ cm}$  de largura, sendo 8 de  $21\text{ cm}$  de comprimento e 8 de  $35\text{ cm}$  de comprimento, que serão dobradas ao meio e colocadas uma na outra em grupo de duas, desse modo ficaremos com 4 arestas de cada tamanho que serão usadas para montar a pirâmide conforme figura [10].

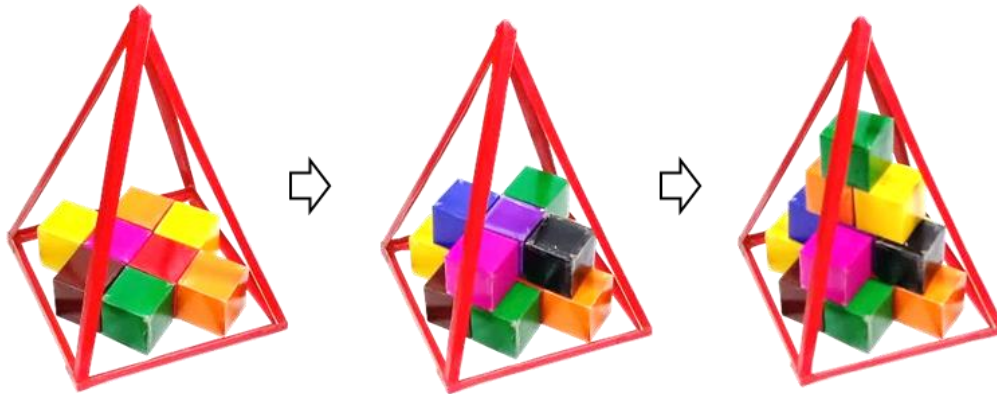
**Figura 10:** Construção de uma pirâmide de base quadrada com papel cartão



Fonte: Autores

Não podemos prosseguir com o mesmo método experimental empregado até agora, pois conforme a altura da pirâmide aumenta, a quantidade de cubinhos que cabe em seu interior diminui, em relação à quantidade que cabe na base, isso indica que a fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide deve ser diferente à do prisma, a figura [11] nos dá uma compreensão da dificuldade que será apreciada.

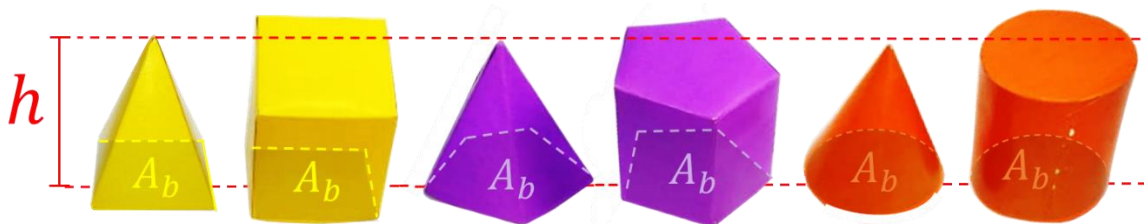
**Figura 11:** Preenchimento de uma pirâmide de base quadrada com cubinhos



Fonte: Autores

No entanto, será que existe alguma relação entre o volume das pirâmides e o volume dos prismas? Bem como o volume dos cilindros e o volume dos cones? Para responder a essas perguntas iremos construir dois prismas, um cilindro, duas pirâmides e um cone, de modo que esses sólidos possuam a mesma área na base ( $A_b$ ) e a mesma altura ( $h$ ), sendo que uma das bases será aberta para possibilitar a realização de um experimento.

**Figura 12:** sólidos de mesma base e altura

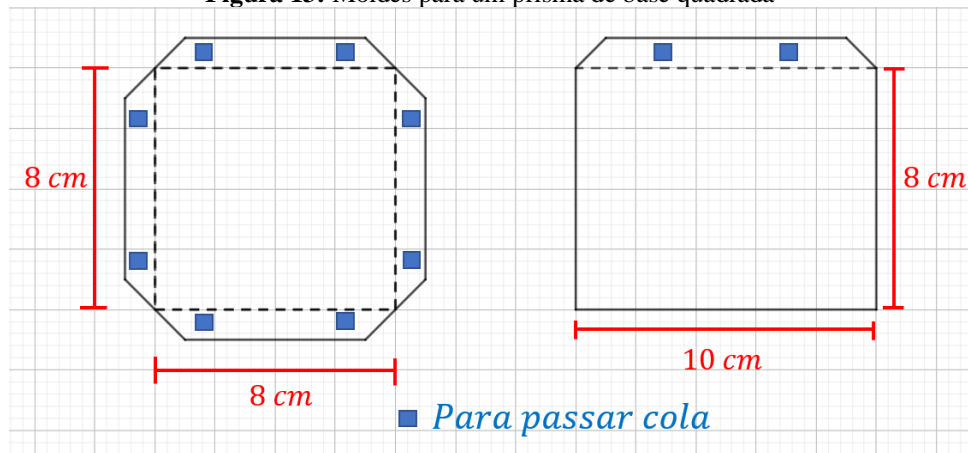


Fonte: Autores

#### 4.2.1. CONSTRUÇÃO DE UM PRISMA DE BASE QUADRADA

Inicialmente construa um quadrado de  $8\text{ cm}$  de lado com quatro espaços para passar cola, construa também 4 retângulos com  $8\text{ cm}$  de largura e  $10\text{ cm}$  de comprimento, conforme figura [13]

**Figura 13:** Moldes para um prisma de base quadrada



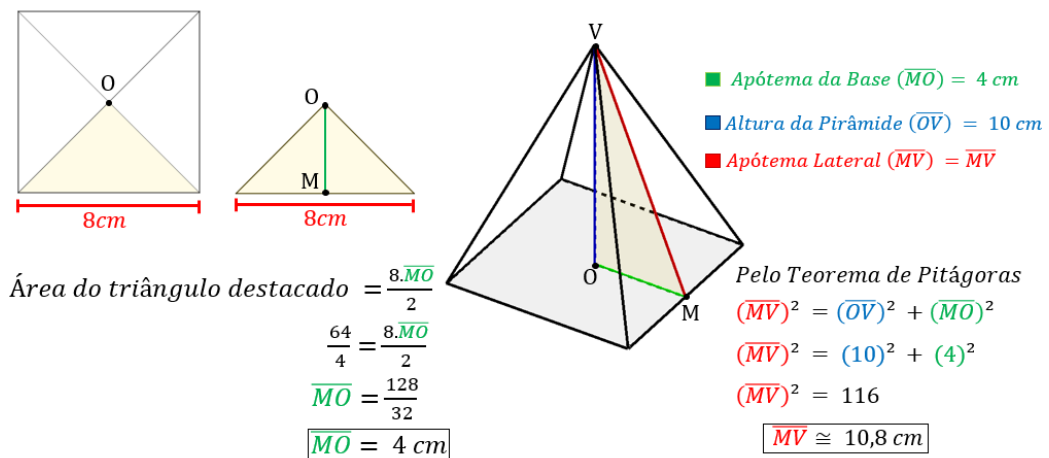
Fonte: Autores

Recorte a planificação e cole em papel cartão para que o sólido fique mais rígido, em seguida monte o prisma dobrando nas linhas pontilhadas e passando cola nos locais indicados.

#### 4.2.2. CONSTRUÇÃO DE UMA PIRÂMIDE DE BASE QUADRADA

Inicialmente será necessário encontrar a apótema da base ( $\overline{MO}$ ) que por se tratar de uma base quadrada basta traçar as diagonais, com isso o polígono será dividido em 4 triângulos congruentes com 4 cm de altura, sendo essa a medida de  $\overline{MO}$ . A pirâmide terá 10 cm de altura ( $\overline{OV}$ ), no entanto para construir a planificação é preciso determinar a medida da apótema da face lateral  $\overline{VM}$ , para tanto pode-se formar um triângulo retângulo em que  $\overline{OV}$  e  $\overline{MO}$  serão os catetos e  $\overline{VM}$  a hipotenusa, então pelo teorema de pitágoras teremos que o apótema da face lateral da pirâmide mede aproximadamente 10,8 cm

**Figura 14:** Apótema da face lateral da pirâmide de base quadrada

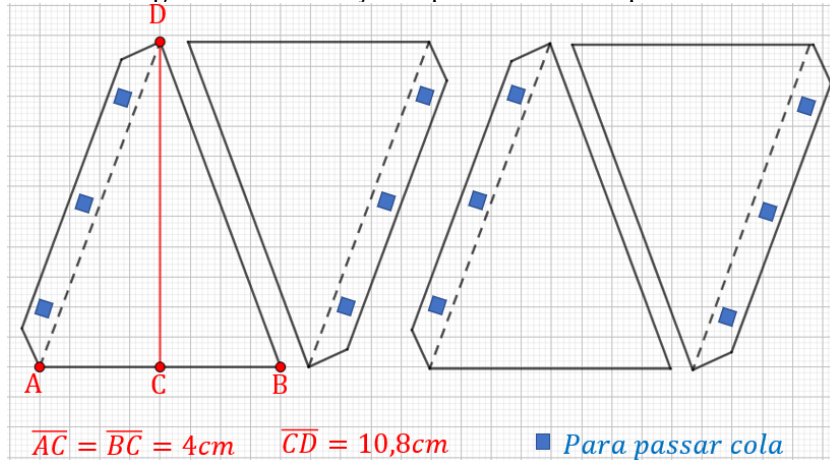


Fonte: Os autores

Para construir uma das faces laterais, demarque um segmento  $\overline{AB}$  com 8 cm de comprimento, demarque o ponto médio C, e trace o segmento  $\overline{CD}$  com 10,8 cm de

comprimento perpendicular a  $\overline{AB}$ . Construa os segmentos  $\overline{AD}$  e  $\overline{BD}$  e os espaços para passar cola. Desenhe mais 3 triângulos que tenham a base  $8\text{ cm}$  e altura  $10,8\text{ cm}$ .

**Figura 15:** Planificação da pirâmide de base-quadrada

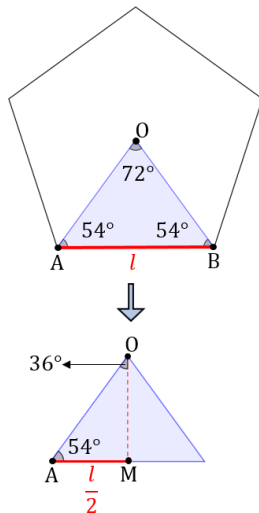


Fonte: Os autores

#### 4.2.3. CONSTRUÇÃO DE UM PRISMA DE BASE PENTAGONAL

Utilizando compasso e transferidor desenhe a base regular com aproximadamente  $64\text{ cm}^2$  de área, para tanto temos que descobrir o valor do lado desse pentágono. É possível dividir esse polígono em 5 triângulos isósceles e com um pouco de trigonometria descobrir o valor da apótema  $\overline{OM}$ , em seguida deduzir uma das fórmulas para o cálculo da área do pentágono, informações essenciais para encontrar a medida aproximada do lado desse polígono de modo que tenha área desejada.

**Figura 16:** Investigação da medida do lado do pentágono de modo que possua  $64\text{ cm}^2$  de área



$$\operatorname{tg}(36^\circ) = \frac{\overline{AM}}{\overline{MO}} \rightarrow \operatorname{tg}(36^\circ) = \frac{\frac{l}{2}}{\overline{MO}} \rightarrow \overline{MO} = \frac{l}{2\operatorname{tg}(36^\circ)}$$

$$\text{Área do triângulo destacado} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{MO}}{2} = \frac{l^2}{4\operatorname{tg}(36^\circ)}$$

Nisso a área do pentágono ( $A_p$ )

$$= 5 \cdot \left[ \frac{l^2}{4\operatorname{tg}(36^\circ)} \right] \text{ então } l = \sqrt{\frac{A_p \cdot 4\operatorname{tg}(36^\circ)}{5}}$$

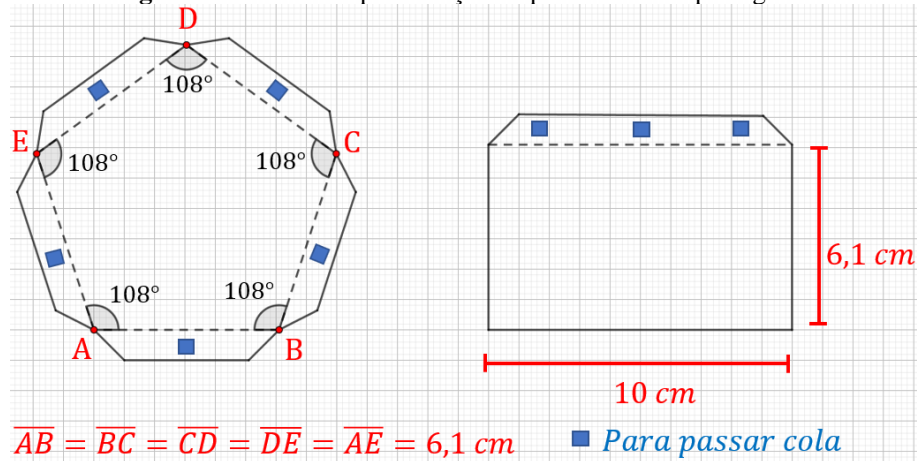
Como queremos o pentágono com  $64\text{ cm}^2$  de área, então:

$$\boxed{\text{Lado do pentágono} \cong 6,1\text{ cm}}$$

Fonte: os autores

Desenhe segmentos com  $6,1\text{ cm}$  de comprimento de modo que suas extremidades formem ângulos de  $108^\circ$ , em cada lado deixe um espaço para passar cola, em seguida construa 5 retângulos cuja a medida da base seja  $10\text{ cm}$  e a altura  $6,1\text{ cm}$ .

**Figura 17:** Moldes da planificação do prisma de base pentagonal

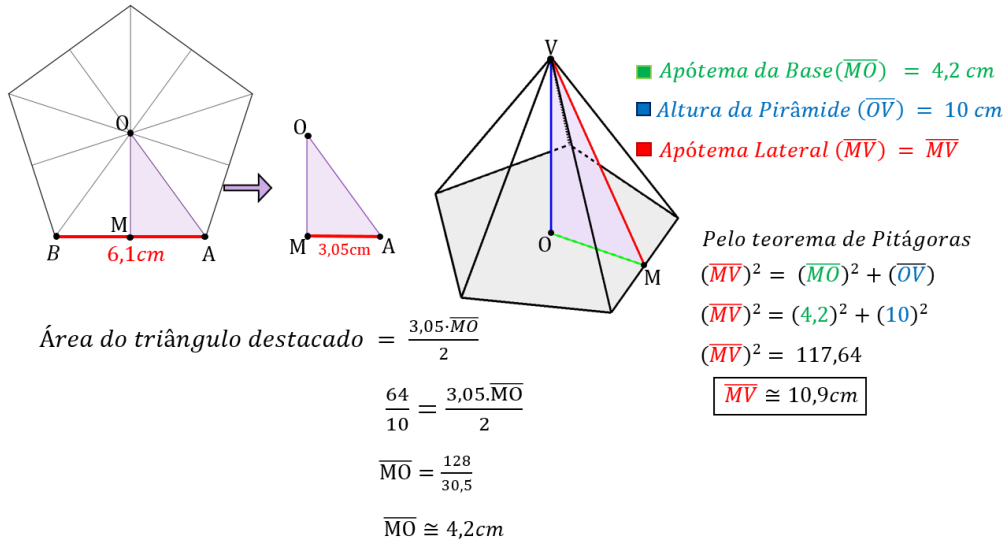


Fonte: os autores

#### 4.2.4. CONSTRUÇÃO DE UMA PIRÂMIDE DE BASE PENTAGONAL

A base da pirâmide será um polígono regular com  $6,1 \text{ cm}$  de lado e aproximadamente  $64 \text{ cm}^2$  de área. Conectando cada vértice do pentágono ao ponto médio de seu lado oposto obteremos 10 triângulos retângulos e congruentes, cujo a altura será o apótema do pentágono ( $\overline{OM}$ ). A área de cada triângulo será a décima parte da área do pentágono, nisso a medida do apótema aproximadamente  $4,3 \text{ cm}$  e aplicando o teorema de pitágoras encontraremos a medida da altura da apótema lateral da pirâmide ( $\overline{MV}$ ) com aproximadamente  $10,9 \text{ cm}$ .

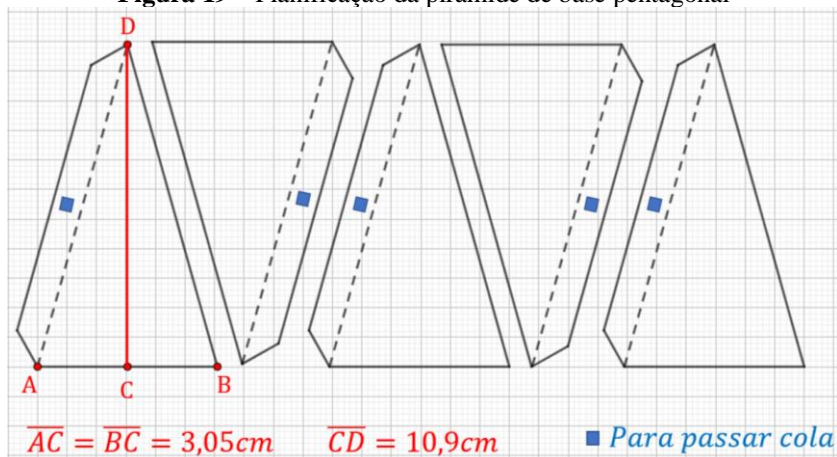
**Figura 18** – Investigação da medida da face lateral da pirâmide de base pentagonal



Fonte: os autores

Construa um segmento  $\overline{AB}$  com  $6,1 \text{ cm}$  de comprimento, encontre o ponto médio de  $\overline{AB}$  e chame de  $C$ , em seguida construa  $\overline{CD}$  perpendicular a  $\overline{AB}$  com  $10,9 \text{ cm}$  de medida, demarque  $\overline{AD}$  e  $\overline{BD}$ , desenhe um espaço para passar cola e construa mais 4 triângulos semelhantes ao primeiro.

**Figura 19** – Planificação da pirâmide de base pentagonal

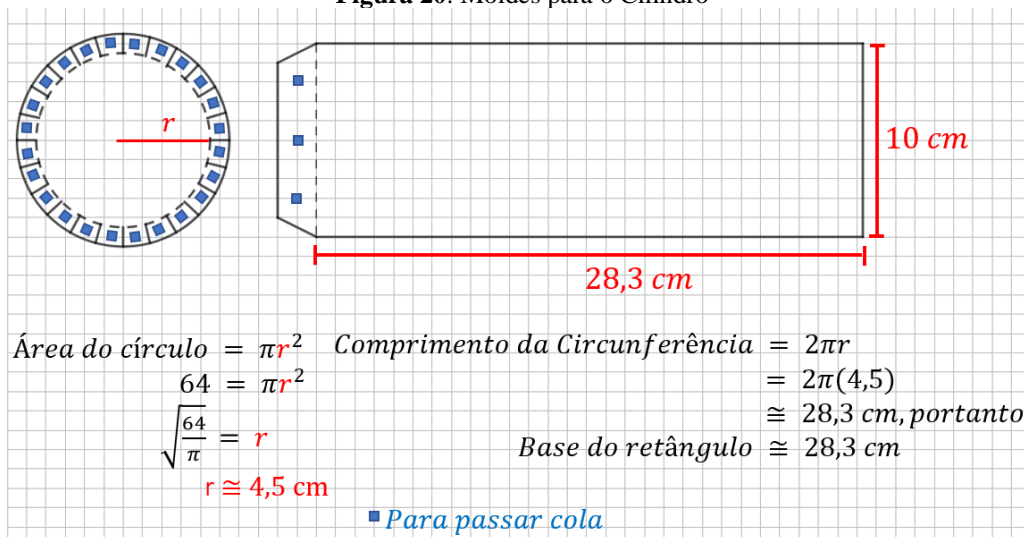


Fonte: Os autores

#### 4.2.5. CONSTRUÇÃO DE UM CILINDRO

Pretende-se contruir um cilindro de 10 cm de altura e base com aproximadamente 64 cm<sup>2</sup> de área, que terá a medida do raio com 4,5 cm de comprimento, com essas informações torna-se possível desenhar a superfície lateral do cilindro (retângulo). Para a base será necessário desenhar dois círculos concêntricos, o primeiro com 4,5 cm de raio e o segundo com 5,5 cm de raio, depois trace segmentos conectando as duas circunferências, esses espaços serão destinados a receber cola de modo a conectar a base com o restante do cilindro.

**Figura 20:** Moldes para o Cilindro



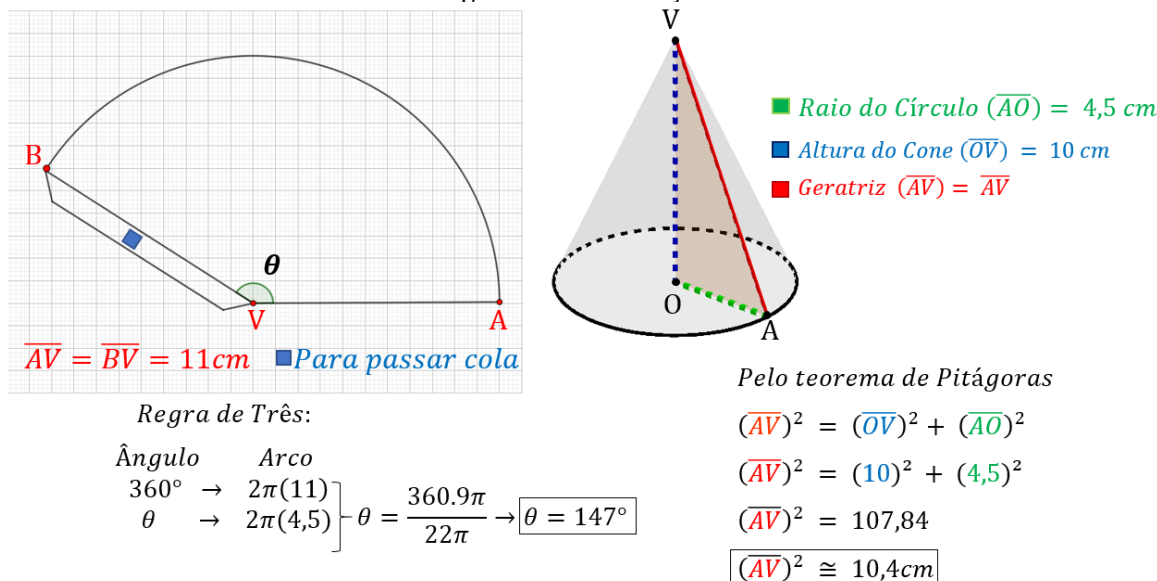
Fonte: Os autores

#### 4.2.6. CONSTRUÇÃO DE UM CONE

A base será um círculo de raio 4,5 cm e área com 64 cm<sup>2</sup> e com a medida da circunferência com aproximadamente 4,5 cm. O cone terá 10 cm de altura, pelo teorema de

pitágoras encontraremos o valor da geratriz ( $\overline{AV}$ ) com aproximadamente  $10,4 \text{ cm}$ , utilizando regra de três temos que a amplitude de  $\theta$  será aproximadamente  $147^\circ$ .

Figura 21 – Planificação do cone



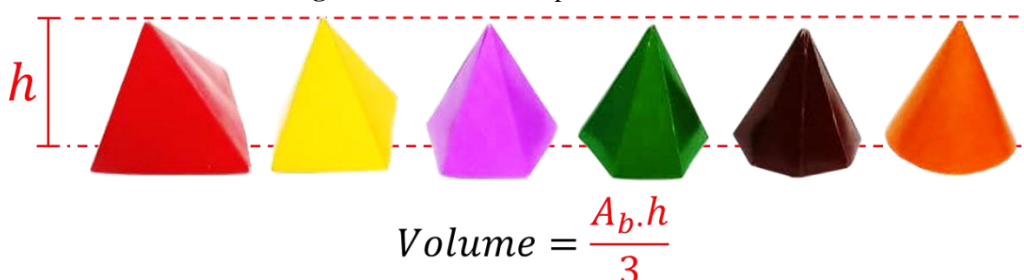
Fonte: Os autores

Trace  $\overline{AV}$  com  $10,4 \text{ cm}$  de comprimento, com auxílio de um transferidor demarque  $\overline{BV}$  de modo que forme  $147^\circ$  com  $\overline{AV}$  e possua  $10,4 \text{ cm}$  de medida, utilizando um compasso, ponta seca em “V” e abertura  $\overline{AV}$  demarque o arco  $\overline{AB}$ , desenhe um espaço para passar cola.

#### 4.2.7. REALIZANDO O EXPERIMENTO

Com os sólidos construídos e com uma boa quantidade de feijões, iremos analisar quantas pirâmides “cabem” dentro dos prismas, para tanto, utilizando os feijões, os participantes devem encher as pirâmides e depois despejar nos prismas, esse processo deverá ser repetido até enche-lo completamente. Com isso verificaremos que a capacidade dos prismas é 3 vezes maior que os das pirâmides, isso implica que o volume das pirâmides é 3 vezes menor. Como o volume dos prismas é área da base vezes a altura, o volume das pirâmides será; a área da base vezes a altura dividido por 3, processo análogo acontece com as pirâmides de outras bases e com os cilindros.

Figura 22: Volume das pirâmides e cones



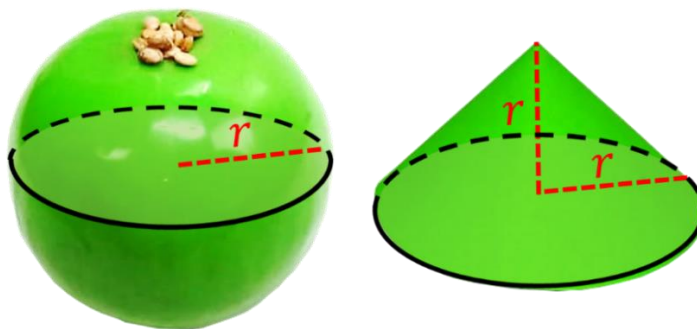
Fonte: Os autores

### 4.3. VOLUME DA ESFERA

Suas curvas perfeitamente simétricas dão a ela um caráter imponente e de destaque na geometria espacial, considerada o sólido mais belo, no entanto como tudo que é belo esconde os seus mistérios, mas não precisaremos de uma bola de cristal (mas sim de vinil) para desvendar o segredo do cálculo de seu volume. Empregaremos o mesmo método experimental com feijões que temos usado até agora.

Serão necessário bolas de vinil, essas irão representar as esferas, por isso o cuidado em escolher as que forem mais simétricas. O desafio é confeccionar um cone que tenha a base congruente ao círculo máximo da esfera e a altura seja da mesma medida que o raio da esfera

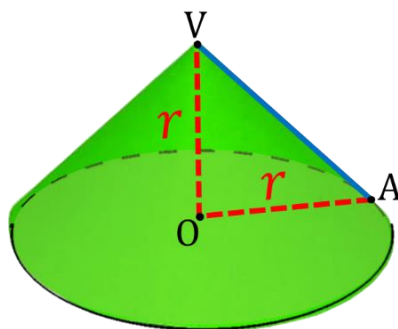
**Figura 23:** Esfera e cone



Fonte: Os autores

Inicialmente será necessário furar a bola em um círculo de aproximadamente  $2\text{ cm}$  de diâmetro e com o auxílio de um funil (pode-se fazer um funil cortando a parte de cima de garrafa pet) encher a esfera com feijões, em seguida ,utilizando uma linha fina, iremos medir a circunferência de raio máximo da bola, denotaremos por " $C_e$ " essa medida. Sabendo que o comprimento da circunferência é igual a  $2\pi r$ , temos que o raio da esfera será  $r_e = \frac{C_e}{2\pi}$  . O cone terá o mesmo raio da esfera, para tanto iremos começar descobrindo a medida da geratriz ( $\overline{AV}$ ).

**Figura 24:** Geratriz do Cone



*Pelo teorema de Pitágoras:*

$$(\overline{AV})^2 = (\overline{AO})^2 + (\overline{OV})^2$$

$$(\overline{AV})^2 = (r)^2 + (r)^2$$

$$(\overline{AV})^2 = 2(r)^2$$

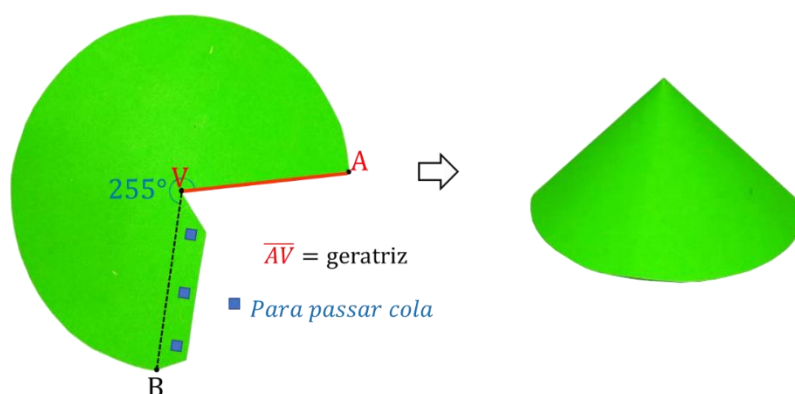
$$\overline{AV} = \sqrt{2r^2}$$

$$\overline{AV} = r\sqrt{2}$$

Fonte: Os autores

Precisamos desenhar um arco da circunferência de raio  $\overline{AV}$ , cuja a corda tenha a mesma medida de  $2\pi r_e$ , para isso basta descobrir a amplitude do arco ( $\theta$ ), usando regra de três simples encontraremos que  $\theta = \frac{360r_e}{\overline{AV}}$  e como  $\overline{AV} = r_e\sqrt{2}$ , temos que  $\theta \cong 255^\circ$ . Utilizando os valores numéricos e com o auxílio de lápis, compasso, régua, transferidor e posteriormente a tesoura (sem ponta) devemos realizar em papel cartão o desenho da figura abaixo

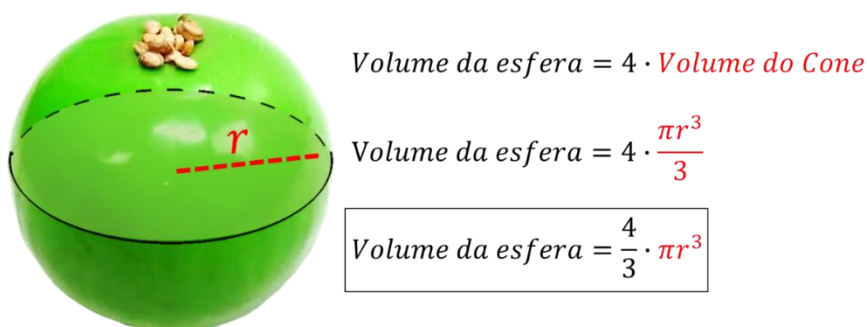
**Figura 25:** Planificação do Cone



Fonte: Os autores

Agora basta despejar os feijões dentro dos cones e analisar quantos cones “cabem” dentro da esfera e com isso verificaremos que a capacidade da esfera é 4 vezes maior, ou seja, o volume da esfera é igual ao volume do cone multiplicado por 4

**Figura 26:** Volume da Esfera



Fonte: Os autores

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os métodos aqui abordados para obtenção do cálculo do volume não apresentam exatidão ao rigor matemático, tampouco esse era o nosso objetivo, pretendemos apenas tornar as fórmulas intuitivas de modo que fique claro e compreensível a demonstração do cálculo. Por ser tratar de experimentos com materiais de baixo custo possivelmente ocorrerá alguns

erros, como por exemplo o conteúdo de 4 cones não se acomodar dentro da esfera ou sobrar algum espaço, com isso ressaltamos que estamos apresentando os conceitos para uma apresentação sobre o volume dos sólidos abordados de maneira simples.

## 6. REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. **A aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982

BRASIL. MEC. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Disponível em: < <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf> >. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: Da teoria à prática**. 23ª edição. Campinas, SP: Papyrus, 2012.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996

GIOVANI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática completa**. 2.ed. São Paulo: FTD, 2005.

LORENZATO, Sergio. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**: Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. Campinas: Autores Associados, 2006. ISBN 978-85-7496-165-1