INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE RONDÔNIA
CAMPUS VILHENA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSÉ VITOR DOS SANTOS SILVA

GEOGEBRA: UMA EXPERIÊNCIA PARA O ENSINO DE DERIVADAS

VILHENA-RO
2022

JOSÉ VITOR DOS SANTOS SILVA

GEOGEBRA: UMA EXPERIÊNCIA PARA O ENSINO DE DERIVADAS

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal de Rondônia, como requisito avaliativo para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Marcos Pinheiro Matos

VILHENA-RO
2022

FICHA CATALOGRÁFICA

Biblioteca IFRO – Campus Vilhena

S586g

SILVA, José Vitor dos Santos
Geogebra : uma experiência para o ensino de derivadas / José Vitor dos Santos Silva – Vilhena, Rondônia, 2022.

61f. ; il.
Orientador Prof. Me. Marcos Pinheiro Matos

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia - IFRO

1. Software Geogebra 2.Ensino 3. Práticas pedagógicas I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia – IFRO II. Título

516.24

Bibliotecária responsável Rosilene Maria do Couto Marques CRB 11/321

Dedico este trabalho aos meus pais Inês e Jose (in memoriam), a quem agradeço aos ensinamentos que me deram para me tornar a pessoa que sou hoje.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus, por ter permitido que eu tivesse saúde e determinação para não desanimar durante todos esses anos de estudos, e ter permitido ultrapassar todos os obstáculos encontrado ao longo do caminho.

Agradeço minha família e meus amigos por todo o carinho, amor e força que me deram num momento tão difícil e complicado, que foi a perda de minha mãe.

A todos os meus colegas de curso, especialmente Elaine, Surma e Vera, meu muito obrigado. Vocês foram peças fundamentais nesse processo, obrigado pelos inúmeros conselhos, puxões de orelhas e ensinamentos. Os momentos que vocês compartilharam comigo nessa etapa tão desafiadora da vida acadêmica, fizeram toda a diferença, por isso merecem o meu eterno agradecimento.

Gratidão a todos os professores que contribuíram em minha formação acadêmica, pelas correções e ensinamentos, enriquecendo meu processo de aprendizado.

Ao professor Me. Marcos, responsável pela orientação desse trabalho e ter desempenhado tal função com dedicação e amizade.

Ao IFRO, por proporcionar o curso de forma gratuita e de qualidade.

"Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas, mas sim preparar a mente para pensar." (Albert Einstein)

"*A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo." (Galileu Galilei)*

"Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda." (Paulo Freire)

RESUMO

A presente monografia tem por finalidade desenvolver um manual de utilização do *software* Geogebra no ensino de derivadas, com o objetivo de auxiliar os docentes e alunos na compreensão gráfica do referido conceito matemático. O trabalho aborda o contexto histórico da derivada, as técnicas de derivação, bem como um apanhado histórico do *software* Geogebra, as principais ferramentas e comandos, além da construção de uma sequência didática-pedagógica para o ensino do conceito de derivada, tornando a abordagem lúdica e atual. O ensino de derivadas caracteriza-se como um processo abstrato, pois trata-se de um conceito novo para boa parte dos alunos. É visível a dificuldade encontrada no processo de ensino desse conteúdo, devido a necessidade de representações gráficas e algébricas, o que muitos alunos caracterizam como difícil e árduo. O uso do *software* Geogebra proporciona novas abordagens pedagógicas aos professores, o que resulta positivamente no processo de ensino, bem como a adoção de novas posturas nas práticas pedagógicas.

Palavras-chave: Derivada; *Software* Geogebra; Ensino; Práticas Pedagógicas.

ABSTRACT

The present monograph aims to develop a manual for the use of the Geogebra software in the teaching of derivatives, with the aim of helping teachers and students in the graphic understanding of the aforementioned mathematical concept. The work addresses the historical context of the derivative, the derivation techniques, as well as a historical overview of the Geogebra software, the main tools and commands, in addition to the construction of a didactic-pedagogical sequence for teaching the concept of derivative, making the approach playful and current. The teaching of derivatives is characterized as an abstract process, as it is a new concept for most students. The difficulty encountered in the teaching process of this content is visible, due to the need for graphic and algebraic representations, which many students characterize as difficult and arduous. The use of Geogebra software provides new pedagogical approaches to teachers, which positively results in the teaching process, as well as the adoption of new postures in pedagogical practices.

Keywords: derivative; Geogebra Software; Teaching; Pedagogical practices.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Papiros de Moscou e Rhind 14
Figura 2 - Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Von Leibniz 15
Figura 3 - Tela inicial 34
Figura 4 - Barra de entrada 34
Figura 5 - Barra de ferramentas 35
Figura 6 - Janela de Álgebra e Janela de Visualização.....35
Figura 7 – Ferramenta para adicionar um ponto 36
Figura 8 – Ferramenta para criar uma reta 37
Figura 9 - Comando para criar uma reta 37
Figura 10 - Representação de Retas no Geogebra.....38
Figura 11 - Comando para criar uma semirreta.....38
Figura 12 - Representação de Semirretas no Geogebra.....39
Figura 13 - Ferramenta para adicionar retas perpendiculares, paralelas 39
Figura 14 - Retas Perpendiculares.....40
Figura 15 - Retas Paralelas.....41
Figura 16 – Reta Tangente 41
Figura 17 - Representação Grafica de Funções.....42
Figura 18 - Ferramenta para criar um controle deslizante.....43
Figura 19 - Primeiros Passos 44
Figura 20 - Segundos passos.....45
Figura 21 – Últimos passos.....45
Figura 22 - Último passo 46
Figura 23 - Reta tangente a função.....47
Figura 24 - Inclinação da reta no ponto de abscissa igual a 5.....48
Figura 25 – Sequência didática desenvolvida 50
Figura 26 - Primeiro Passo da Sequência Didática.....50
Figura 27 - Segundo Passo da Sequência Didática.....51
Figura 28 - Ultimo Passo da Sequência Didática 51
Figura 29 - Gráfico da função $\mathrm{L(x)} = -\frac{1}{3}\mathrm{x}^3 + 2\mathrm{x}^2 + 21\mathrm{x} - 20.$ 55
Figura 30 - Gráfico da primeira e segunda derivada de $L(x)$. 56

Figura 31 - Gráfico da função $\mathrm{C}(\mathrm{M})$. 56
Figura 32 - Gráfico da primeira derivada de $C(M)$.....57

SUMÁRIO

1 **INTRODUÇÃO** 12

2 **A DERIVADA** 14

2.1 Contexto histórico 14

2.2 Definição 16

2.3 Técnicas de derivação 18

2.3.1 Derivada de uma função constante 18

2.3.2 Derivada de uma função potência 18

2.3.3 Derivada de Soma e Diferença de funções 20

2.3.4 Derivada de um Produto 21

2.3.5 Derivada de um Quociente 22

2.3.6 Derivada de uma Função Potência com Expoente Negativo 23

2.3.7 Derivada da Função Seno 24

2.3.8 Derivada da Função Cosseno 24

2.3.9 Derivada da Função Tangente 25

2.3.10 Derivada da Função Secante 26

2.3.11 Derivada da Função Cossecante 26

2.3.12 Derivada da Função Cotangente 27

2.3.13 Derivada de uma Função Composta – Regra da Cadeia 28

2.3.14 Derivada da Função Exponencial 28

2.3.15 Derivada da Função Logarítmica 29

3 **O *SOFTWARE* GEOGEBRA** 32

3.1 Contexto Histórico e Utilidades 32

3.2 Interface e Ferramentas do *Software* Geogebra 33

3.2.1 Tela inicial do Geogebra 34
3.2.2 Barra de entrada 34
3.2.3 Barra de Ferramentas 34
3.2.4 Janela de Visualização versus Janela de Álgebra 35
3.2.5 Ferramenta para criar um ponto 36
3.2.6 Ferramenta para criar retas e semirretas 36
3.2.7 Ferramenta para criar retas perpendiculares, Paralelas e Tangentes 39
3.2.8 Funções 42
3.2.9 Controle Deslizante 43
4 **A DERIVADA NO GEOGEBRA** 44
4.1 Proposta De Sequência Didática Para Uso Do Geogebra 49
5 **APLICAÇÕES** 52
5.1 Problemas de Máximos e Mínimos 52
5.2 Desenvolvimento das aplicações no Geogebra 55
6 **CONSIDERAÇÕES FINAIS** 58
REFERÊNCIAS 59

1 INTRODUÇÃO

O processo de ensino e aprendizagem em matemática, exige do docente uma intensa busca por metodologias assertivas e práticas diversificadas de ensino aprendizagem. O ensino de derivadas, seja no Ensino Superior ou Secundário é considerado um assunto de dificuldade extrema e inaplicáveis por boa parte dos alunos, e um dos principais motivos é a não visibilidade de aplicações diretas.

Diante do exposto, o presente trabalho foi elaborado com o objetivo de apresentar uma proposta de ensino de derivadas, com a utilização do *software* Geogebra, através de uma linguagem clara e acessível, bem como desenvolver um manual de apoio, com o intuito de ajudar nessa alternativa de ensino, contribuindo assim no processo de ensino-aprendizagem.

De acordo com Hallal (2016) o uso de *Software*s computacionais aplicados, possibilitam uma inovação no ensino, que podem ajudar na abordagem desses conteúdos, pois são considerados uma ferramenta auxiliar na construção de conceitos e aplicação relacionados ao ensino de matemática, o que permite criar situações de aprendizagem estimulante. Além disso, o uso dessas ferramentas pode viabilizar a construção do conhecimento, de maneira autônoma e independente.

O trabalho está dividido em quatro capítulos, onde no capítulo 1 é apresentado o contexto histórico da derivada, a definição e as principais técnicas de derivação.

No capítulo 2 é apresentado o *software* Geogebra, discutindo a origem, a interface e as principais ferramentas, bem como a importância de utilizar o *software* para auxiliar o processo de ensino-aprendizagem, enriquecendo assim a prática docente na construção do conhecimento.

O terceiro capitulo, aborda a derivada no Geogebra, na qual, através de exemplos, foram feitas construções geométricas, para auxiliar os alunos na interpretação e visualização gráfica da derivada em um determinado ponto. Além das construções geométricas, foi desenvolvido uma ferramenta didática para auxilio dos alunos durante a resolução de exercícios, no qual os alunos poderão explorar o gráfico da função $f(x)$, a representação geométrica da derivada $f'(x)$, além de

conferir se o valor encontrado nos cálculos manuais condiz de fato com o valor da derivada.

Finalizando, o capitulo 4 faz uma abordagem acerca das aplicações cotidianas das derivadas, dando uma ênfase maior na otimização de problemas, onde através das derivadas obtém-se a maximização ou minimização de determinado fenômeno, com resoluções de exemplos e representação gráfica no *software* Geogebra.

2 A DERIVADA

2.1 Contexto histórico

De acordo com os relatos históricos, a matemática nasceu na babilônia, por volta do ano 3500a.C, da necessidade de contar objetos. Criada por grandes matemáticos, com o passar dos anos tornou-se uma ciência sistematizada que, através da abstração, sintetiza ideias.

O cálculo é uma das técnicas mais utilizada na matemática, e foi estudado por variados filósofos dos séculos passados. Entretanto somente no século XII que de fato o cálculo começou a dar seus primeiros passos e ter avanços significativos.

A partir de certos artefatos encontrados apontam resultados de que a partir da geometria e da álgebra o cálculo foi desenvolvido, sendo usado para o cálculo de áreas e volumes de objetos.

Os primeiros sinais do uso do cálculo foram encontrados nos Papiros de Moscou e Rhind.

Figura 1 - Papiros de Moscou e Rhind

Fonte: Wikipedia

No Papiro de Moscou (1800 a.C.), foram achados resultados sobre o cálculo de áreas e volumes, como exemplo, o volume de um tronco de pirâmide. Já no Papiro de Rhind (1600 a.C.), um papiro egípcio, foram encontrados resultados matemáticos, como exemplos, o volume de uma pirâmide quadrada era calculado como $\frac{1}{3}$ do volume do prisma retangular e a área de um círculo era obtida por um quadrado cujo lado é $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo.

O desenvolvimento da teoria do cálculo diferencial e integral, envolve Newton e Leibniz como percussores e construtores de tal teoria, ambos em seus estudos e contribuições chegaram a resultados semelhantes sem a influência um do outro, sendo nos dias atuais considerados como os inventores do Cálculo.

Os dois exploraram a relação entre derivadas e integrais, usando tal relação para transformar o cálculo em um método matemático sistemático.

Figura 2 - Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Von Leibniz

Fonte: Wikipedia

Apesar de Newton e Leibniz serem os principais colaboradores para o crescimento do cálculo, por algum tempo depois, segundo Eves,

> [...] os fundamentos do cálculo permaneceram obscuros e despercebidos, pois era a enorme aplicabilidade da matéria o que atraía os primeiros pesquisadores. Por volta de 1700, a maior parte do cálculo que hoje se vê nos cursos de graduação já fora estabelecida, juntamente com tópicos mais avançados, como o cálculo de variações. O primeiro texto de cálculo foi publicado em 1696; seu autor, a marquês de L'hospital (1661- 1704), por um acordo singular, publicou as lições que recebera de seu professor particular, Johann Bernoulli. Nesse livro encontra-se a chamada regra de L'hospital, para determinar o limite de uma fração cujo numerador e cujo denominador tendem simultaneamente para zero [...]. (EVES, 2007, p. 444).

O cálculo de derivada teve seus primeiros passos na Grécia antiga, com a finalidade de resolver problemas geométricos ligados a estudos de traçados de retas secantes e retas tangentes a uma dada curva.

No início do século XVII, Descartes e Fermat introduziram as coordenadas cartesianas, tornando possível a transformação de problemas geométricos em

problemas algébricos, mas foi Fermat mesmo sem ter notações apropriadas e o conceito de limites não muito claro, que deu início ao conceito de derivadas. Foi enquanto se dedicava ao estudo de algumas funções que Fermat deu conta das limitações do conceito clássico de reta tangente a uma curva como sendo aquela que encontrava a curva num único ponto.

Tornou-se assim importante reformular tal conceito e encontrar um processo de traçar uma tangente a um gráfico num dado ponto - esta dificuldade ficou conhecida na História da Matemática como o " Problema da Tangente". Fermat resolveu esta dificuldade de uma maneira muito simples: para determinar uma tangente a uma curva num ponto P considerou outro ponto Q sobre a curva; considerou a reta PQ secante à curva. Seguidamente fez deslizar Q ao longo da curva em direção a P, obtendo deste modo retas PQ que se aproximavam duma reta t a que Fermat chamou a reta tangente à curva no ponto P.

Fermat notou que para certas funções, nos pontos onde a curva assumia valores extremos, a tangente ao gráfico devia ser uma reta horizontal, já que ao comparar o valor assumido pela função num desses pontos *P (x, f(x))* com o valor assumido no outro ponto *Q (x+E, f(x+E))* próximo de P, a diferença entre *f(x+E)* e *f(x)* era muito pequena, quase nula, quando comparada com o valor de E, diferença das abcissas de Q e P. Assim, o problema de determinar extremos e de determinar tangentes a curvas passam a estar intimamente relacionados.

2.2 Definição

O conceito de derivada está intimamente relacionado à taxa de variação instantânea de uma função, o qual está presente no cotidiano das pessoas, através, por exemplo, da determinação da taxa de crescimento de uma certa população, da taxa de crescimento econômico do país, da taxa de redução da mortalidade infantil, da taxa de variação de temperaturas, da velocidade de corpos ou objetos em movimento, enfim, poderíamos ilustrar inúmeros exemplos que apresentam uma função variando e que a medida desta variação se faz necessária em um determinado momento.

Para entendermos como isso se dá, inicialmente vejamos a definição matemática da derivada de uma função em um ponto.

Definição: Se uma função f é definida em um intervalo aberto contendo x_0, então a derivada de f em x_0, denotada por $f\,'(x_0)$, é dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

se este limite existir, Δx representa uma pequena variação em x, próximo de x_0, ou seja, tomando x = x_0 + Δx, sendo assim Δx = x − x_0, a derivada de f em x_0, pode também se expressa por

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Tomemos a função $f(x) = 5x^2 - 4x + 8$ como exemplo. Vamos encontrar a derivada da função $f(x)$ no ponto x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[5(x_0 + \Delta x)^2 - 4(x_0 + \Delta x) + 8] - [5(x_0)^2 - 4(x_0) + 8]}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[5{x_0}^2 + 10x_0\Delta x + 10\Delta x^2 - 4x_0 - 4\Delta x + 8] - [5{x_0}^2 - 4x_0 + 8]}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5{x_0}^2 + 10x_0\Delta x + 10\Delta x^2 - 4x_0 - 4\Delta x + 8 - 5{x_0}^2 + 4x_0 - 8}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10x_0\Delta x + 5\Delta x^2 - 4\Delta x}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} 10x_0 + 5\Delta x - 4$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} 10x_0 - 4$$

Tratando a derivada como uma forma geométrica, temos que a derivada da função f em x_0, é a inclinação da reta r, tangente ao gráfico de f em P_0. Ou melhor dizendo, uma reta tangente à função f, em $(x_0, f(x_0))$, é a reta que passa em $(x_0, f(x_0))$, cuja inclinação é igual a derivada de f em x_0, ou $f\,'(x_0)$.

Dentre as principais formas de notação de uma derivada as que são mais utilizadas são a representação de **Lagrange** ($y' = f'(x)$, e a de **Leibniz** $\frac{d_y}{dx}$ ou $\frac{d}{dx}[f(x)]$.

2.3 Técnicas de derivação

O processo de cálculo da derivada é denominado derivação. Assim, a derivação é o processo de derivar uma função f' de uma função f . Se uma função possui uma derivada em x_1, ela será derivável em x_1. Isto é, a função f será derivável em x_1 se $f(x_1)$ existir. Uma função será derivável em um intervalo aberto se ela for derivável em todo número no intervalo aberto.

As técnicas de derivação são formas de generalizar a derivada de algumas funções. Elas são muitos úteis quando, ao resolver um problema, podemos identificar a forma que a sua expressão assume.

2.3.1 Derivada de uma função constante

Seja a função $\boldsymbol{f(x) = c}$ uma função constante então:

Teorema 1

Se a derivada de uma função constante é **0**, isto é, se **c** for um número real qualquer, então $\boldsymbol{f'(x) = 0}$

Demonstração

Seja $\boldsymbol{f(x) = c}$, temos:

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Obtendo

$\boldsymbol{f(x+h) = c}$ e que $\boldsymbol{f(x) = c}$ **,** então:

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} 0}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 0}$$

2.3.2 Derivada de uma função potência

Seja a função $\boldsymbol{f(x) = x^n}$ uma função de $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ temos:

Teorema 2

Se uma função do tipo $\boldsymbol{f(x) = x^n}$ em que $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$, então sua derivada é $\boldsymbol{f'(x) = nx^{n-1}}$.

Demonstração

Seja $\boldsymbol{f(x) = x^n}$, temos:

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Obtendo

$\boldsymbol{f(x+h) = (x+h)^n}$

Desenvolvendo o Binômio de Newton $\boldsymbol{(x+h)^n}$ temos:

$$f(x+h) = \binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots \binom{n}{n} x^0 h^n$$

e que $\boldsymbol{f(x) = x^n}$.

Substituindo teremos:

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n}{h}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n}{h}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots \binom{n}{n} x^0 h^n}{h}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h\left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h^1 + \cdots \binom{n}{n} x^0 h^{n-1}\right]}{h}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h \quad + \cdots \binom{n}{n} x^0 h^{n-1}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} 0 \quad + \cdots \binom{n}{n} x^0 0^{n-1}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \binom{n}{1} x^{n-1}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = n x^{n-1}}$$

Teorema 3

Se uma função do tipo $f(x) = x^n$ em que $n \in \mathbb{N}^*$, e c uma constante e $g(x) = c.f(x)$ então sua derivada é $g'(x) = c.f'(x)$.

Demonstração

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Fazendo $g(x) = c.f(x)$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

$$g'(x) = c \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$g'(x) = cf'(x)$$

2.3.3 Derivada de Soma e Diferença de funções

Sejam as funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ em que $h(x) = f(x) + g(x)$, temos:

Teorema 4

Se $f(x)$ e $g(x)$ forem funções e se $h(x)$ for a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$ então, se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem logo $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

Demonstração

Derivando a função $h(x)$, temos:

$$h'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h}$$

Sendo $h(x) = f(x) + g(x)$ logo:

$$h'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$h'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}$$

$$h'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

$$h'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

2.3.4 Derivada de um Produto

Sejam as funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ em que $h(x) = f(x).g(x)$, temos:

Teorema 5

Se $f(x)$ e $g(x)$ forem funções e se $h(x)$ for a função definida por $h(x) = f(x).g(x)$ então se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem logo $h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

Demonstração

Derivando a função $h(x)$, temos:

$$h'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{h(x+h)-h(x)}{h}$$

$$h'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x).g(x)}{h}$$

Agora teremos que adicionar e subtrair a quantidade $f(x+h).g(x)$ no numerador.

$$h'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)+f(x+h).g(x)-f(x+h).g(x)-f(x).g(x)}{h}$$

Colocando em evidência

$$h'(x) = \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$h'(x) = \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} f(x+h)\ .\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x).\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Daí temos que:

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

$$\lim_{h\to 0} g(x) = g(x)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Logo teremos:

$$h'(x) = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$$

O que é o mesmo que:

$$h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

2.3.5 Derivada de um Quociente

Sejam as funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ em que $h(x) = f(x).g(x)$, temos:

Teorema 6

Se $f(x)$ e $g(x)$ forem funções e se $h(x)$ for a função definida por $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ então, se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem logo $h'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$

Demonstração

Derivando a função $h(x)$, temos:

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h}$$

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

Resolvendo m.m.c. no numerador e fazendo a divisão das frações, temos

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).g(x) - f(x).g(x+h)}{h.g(x).g(x+h)}$$

Agora teremos que adicionar e subtrair a quantidade $f(x_0).g(x_0)$ no numerador.

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).g(x) - f(x).g(x) - f(x).g(x+h) + f(x).g(x)}{h.g(x).g(x+h)}$$

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left[g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] - \left[f(x_0)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]}{g(x).g(x+h)}$$

$$h'(x) = \frac{\lim_{h\to 0} g(x) . \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} f(x) . \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim_{h\to 0} g(x) . \lim_{h\to 0} g(x+h)}$$

Daí temos que:

$$\lim_{h\to 0} g(x) = g(x)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\lim_{h\to 0} f(x) = f(x)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$$

Logo teremos:

$$h'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{g(x).g(x)}$$

2.3.6 Derivada de uma Função Potência com Expoente Negativo

Seja a função $f(x) = x^{-n}$ uma função de $-n \in \mathbb{Z}^*$ temos:

Teorema 7
Se uma função do tipo $f(x) = x^{-n}$ em que $-n \in \mathbb{Z}^*$, então sua derivada é $f'(x) = -nx^{-n-1}$.

Demonstração

Se $-n$ for um número inteiro negativo, então n será inteiro positivo.

$$f(x) = \frac{1}{x^n}$$

Utilizando o Teorema 6, temos:

$$f'(x) = \frac{x^n.0 - 1.nx^{n-1}}{(x^n)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$f'(x) = -nx^{n-1-2n}$$

$$f'(x) = -nx^{-n-1}$$

2.3.7 Derivada da Função Seno

Seja a função seno $f(x) = sen\, x$, temos:

Teorema 8
Se uma função do tipo $f(x) = sen\, x \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$, então sua derivada é $f'(x) = cos\, x$.

Demonstração

Aplicando a definição de derivada,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h}$$

Utilizando as transformações trigonométricas,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sen\,(x)\cos(h) + \cos(x)\, sen\,(h) - sen(x)}{h}$$

Colocando em evidência o $sen\,(x)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sen\,(x)[\cos(h) - 1]}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\, sen\,(h)}{h}$$

$$f'(x) = (-1) \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} . \lim_{h\to 0} sen\, x + \lim_{h\to 0} \cos(x) . \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h}$$

Utilizando limites, teremos

$$f'(x) = -0\, .sen\, x + \cos x \ \ .1$$

$$f'(x) = \cos x$$

2.3.8 Derivada da Função Cosseno

Seja a função cosseno $g(x) = cos\, x$, temos:

Teorema 9
Se uma função do tipo $g(x) = cos\, x \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$, então sua derivada é $g'(x) = -sen\, x$.

Demonstração

Da definição de derivada,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

Utilizando as transformações trigonometricas

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x).\cos(h) - \text{sen}(x).sen(h) - \cos(x)}{h}$$

Colocando em evidência o $\boldsymbol{cos}\ (\boldsymbol{x})$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{cos\ (x)[\cos(h) - 1]}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x)\ sen\ (h)}{h}$$

$$g'(x) = (-1) \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} . \lim_{h\to 0} cos\ (x) - \lim_{h\to 0} sen\ (x) . \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(h)}{h}$$

Utilizando limites, teremos

$$g'(x) = -0\ .cos\ x - sen\ x\ .1$$

$$\boldsymbol{g'(x) = -\,\text{sen}\,x}$$

2.3.9 Derivada da Função Tangente

Seja a função tangente $\boldsymbol{h(x) = tg\ x}$, temos:

Teorema 10
Se uma função do tipo $\boldsymbol{h(x) = tg\ x}$ $\quad \forall\ a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$ então sua derivada é $\boldsymbol{h'(x) = sec^2\ x}$ **.**

Demonstração

Como a função tangente é $\boldsymbol{tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}}$ vamos utilizar a derivada de um quociente.

Fazendo $f(x) = sen\ x$ e $g(x) = cos\ x$, e que $f'(x) = cos\ x$ e $g'(x) = -sen\ x$ temos:

$$\boldsymbol{h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{h'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

$$h'(x) = \frac{cos(x).cos(x) - sen(x).[-sen(x)]}{[cos(x)]^2}$$

$$h'(x) = \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)}$$

Utilizando as relações trigonometricas,

$$h'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$$

Utilizando as relações trigonometricas, temos que

$$\boldsymbol{h'(x) = sec^2(x)}$$

2.3.10 Derivada da Função Secante

Seja a função secante $\boldsymbol{h(x) = sec\, x}$, temos:

Teorema 11
Se uma função do tipo $\boldsymbol{h(x) = sec\, x}$ $\forall\, a \in \mathbb{R}$, então sua derivada é $\boldsymbol{h'(x) = sec\,(x).tg(x)}$ **.**

Demonstração

Como a função secante é $\boldsymbol{sec\, x = \frac{1}{cos\, x}}$ vamos utilizar a derivada de um quociente.

Fazendo $f(x) = 1$ e $g(x) = cos\, x$, e que $f'(x) = 0$ e $g'(x) = -sen\, x$, temos:

$$\boldsymbol{h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{h'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

$$h'(x) = \frac{cos(x).0 - 1.[-sen(x)]}{[cos\,(x)]^2}$$

$$h'(x) = \frac{sen\,(x)}{cos^2(x)}$$

Porém, podemos melhorar assim:

$$h'(x) = \frac{1}{cos(x)} . \frac{sen\,(x)}{cos(x)}$$

Utilizando as relações trigonometricas**,** temos que:

$$\boldsymbol{h'(x) = sec(x).tg(x)}$$

2.3.11 Derivada da Função Cossecante

Seja a função cossecante $\boldsymbol{h(x) = cossec\, x}$, temos:

Teorema 12
Se uma função do tipo $\boldsymbol{h(x) = cossec\, x}$ $\forall\, a \in \mathbb{R}$, então sua derivada é $\boldsymbol{h'(x) = -cossec\,(x).cotg(x)}$**.**

Demonstração

Como a função cossecante é $\boldsymbol{cossec\, x = \frac{1}{sen\, x}}$ vamos utilizar a derivada de um quociente.

Fazendo $f(x) = 1$ e $g(x) = sen\, x$, e que $f'(x) = 0$ e $g'(x) = cos\, x$ temos:

$$\boldsymbol{h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow h'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

$$h'(x) = \frac{0.sen(x) - 1.[cos(x)]}{[sen\,(x)]^2}$$

$$h'(x) = \frac{-cos(x)}{sen^2\,(x)}$$

Porém, podemos melhorar assim:

$$h'(x) = (-1)\frac{1}{sen(x)}.\frac{cos(x)}{sen\,(x)}$$

Utilizando as relações trigonometricas, temos

$$\boldsymbol{h'(x) = -\,cossec(x)\,.cotg(x)}$$

2.3.12 Derivada da Função Cotangente

Seja a função cotangente $\boldsymbol{h(x) = cotg\, x}$, temos:

Teorema 13
Se uma função do tipo $\boldsymbol{h(x) = cotg\, x}$ $\forall\, a \in \mathbb{R}$, então sua derivada é $\boldsymbol{h'(x) = -cossec^2\,(x)}$ **.**

Demonstração

Como a função cotangente é $\boldsymbol{cotg\, x = \frac{cos\, x}{sen\, x}}$ vamos utilizar a derivada de um quociente.

Fazendo $f(x) = cos\, x$ e $g(x) = sen\, x$, e que $f'(x) = -sen\, x$ e $g'(x) = cos\, x$ temos:

$$\boldsymbol{h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow h'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

$$h'(x) = \frac{[-sen\,(x)].sen(x) - cos(x).\cos\,(x)}{[sen(x)]^2}$$

$$h'(x) = \frac{-sen^2(x) - cos^2(x)}{sen^2(x)}$$

Porém, podemos melhorar assim:

$$h'(x) = \frac{(-1)sen^2(x) + cos^2(x)}{sen^2(x)}$$

Utilizando as relações trigonométricas, temos

$$\boldsymbol{h'(x) = -cossec^2(x)}$$

2.3.13 Derivada de uma Função Composta – Regra da Cadeia

Seja a função composta $\boldsymbol{h(x) = f(g(x)}$, temos:

Teorema 14
Se a função $\boldsymbol{g}$ for derivável em $\boldsymbol{x}$ e a função $\boldsymbol{f}$ for derivável em $\boldsymbol{g(x)}$, então a função composta $\boldsymbol{f(g(x))}$ ou $\boldsymbol{fog}$ será derivável em $\boldsymbol{x}$, e $(f\ o\ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

Demonstração

Precisamos mostrar que existe o seguinte limite:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(g(x+\Delta x)) - h(g(x))}{\Delta x}$$

Sendo $u = g(x)$, colocamos $\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$. Então, Δu depende de Δx e, quando $\Delta x \to 0$, temos $\Delta u \to 0$.

Temos assim,

$$g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta u = u + \Delta u$$

e podemos escrever: $h(g(x)) = h(u)$ e $h(g(x+\Delta x)) = h(u+\Delta u)$. Logo,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(u+\Delta u)-h(u)}{\Delta x}.$$

Suponhamos que $\Delta u \neq 0$. Então,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(u+\Delta u) - h(u)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(u+\Delta u) - h(u)}{\Delta x}.\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(u+\Delta u)-h(u)}{\Delta u}.\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(u+\Delta u)-h(u)}{\Delta u}.\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \qquad (*)$$

Quando $\Delta x \to 0$, temos $\Delta u \to 0$, e utilizando a **hipótese**, temos:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = h'(u).g'(x) = h'(g(x)).g'(x),$$

o que completa a prova no caso em que $\Delta u \neq 0$.

2.3.14 Derivada da Função Exponencial

Seja a função $\boldsymbol{f(x) = a^x}$, onde $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{a \neq 1}$, temos:

Teorema 15
Se uma função do tipo $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ com $a > 0$ e $a \neq 1$, então sua derivada é $\boldsymbol{f'(x) = a^x.ln\ a}$.

Demonstração

Da definição de derivada,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

Evidenciando a^x

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

Separando o limite de um produto

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} a^x \,.\, \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Como $\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$ é o limite fundamental, logo

$$\boldsymbol{f'(x) = a^x . \ln a}$$

2.3.15 Derivada da Função Logarítmica

Seja a função $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$, onde $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{a \neq 1}$, temos:

Teorema 16
Se uma função do tipo $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$ com $a > 0$ e $a \neq 1$, então sua derivada é $\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{x.\ln a}}$.

Demonstração

Da definição de derivada,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}$$

Pela propriedade do logaritmo de uma divisão, temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a \frac{(x+h)}{x}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{h} . \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)\right]$$

Pela propriedade do Logaritmo de uma potências, temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right]$$

Dividindo o numerador e denominador da fração $\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{x}}$ por $\boldsymbol{h}$, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\log_a\left(1+\frac{{}^{h}/_{h}}{{}^{x}/_{h}}\right)^{\frac{1}{h}}\right]$$

Multiplicando o numerador e denominador da fração expoente $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{h}}$ por $\boldsymbol{x}$, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\log_a\left(1+\frac{1}{{}^{x}/_{h}}\right)^{\frac{1}{h}.\frac{x}{x}}\right]$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\log_a\left(1+\frac{1}{{}^{x}/_{h}}\right)^{\frac{x}{xh}}\right]$$

Transformando potência de potência o expoente no produto $\frac{x}{h}.\frac{1}{x}$ temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\log_a\left(1+\frac{1}{{}^{x}/_{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}$$

Existe uma propriedade em que

$\lim_{\boldsymbol{h-a}} \log_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \log_{\boldsymbol{a}} \lim_{\boldsymbol{h\to a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, logo

$$f'(x) = \log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{{}^{x}/_{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}$$

Aplicando a propriedade do logaritmo de uma potência, temos

$$f'(x) = \frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{{}^{x}/_{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right]$$

Pelo Limite Fundamental, temos

$$f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

Fazendo a mudança de Base do Logaritmo para a base e, temos

$$\log_a e = \frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a}$$

Logo a derivada também pode ser expressa na fórmula:

$$f'(x) = \frac{1}{x.\ln a}$$

3 O *SOFTWARE* GEOGEBRA

3.1 Contexto Histórico e Utilidades

O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino, reunindo em um único pacote Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos, desenvolvido durante alguns anos por Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburg em 2001, e mais tarde, levado para a Universidade Florida Atlantic de 2006 a 2008. Atualmente, o projeto está na Universidade de Lins, no qual conta com uma equipe de desenvolvedores Open-Source.

O programa permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc., assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas.

Portanto, o GeoGebra é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivar e integrar funções, e ainda oferecer comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Com isto, o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo. Isto tem a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto.

O projeto teve início como um aplicativo para desktop, mas após uma campanha de sucesso no Kickstarter, o *software* passou para aparelhos mobile com versões na Apple store, Google Play, Windows Store App. O aplicativo continua em processo de aprimoramento para apresentar o melhor em questão de *Software* sobre matemática dinâmica e serviços para estudantes e professores de todo o mundo.

O aplicativo apresenta muito recursos interativos e dinâmicos para serem utilizados em sala de aula, o que o torna uma ferramenta de grande serventia para ensinar da maneira mais simples, conteúdos que são considerados complexos da matemática, com inúmeras ferramentas para criação de objetos.

O Geogebra possui muitas vantagens, tanto para os alunos quanto para os professores. Para os alunos, ele torna a Matemática mais compreensível, pois, cria uma ponte entre Geometria e Álgebra, permitindo que os alunos possam observar, experimentar e vivenciar a matemática. Por ser um aplicativo interativo, divertido e por ter uma interface de usuário simples, o aluno nem percebe que está estudando, por estar aprendendo enquanto se diverte. Por estar presente nos computadores e tablets, o Geogebra é completamente acessível e fácil de ser usado em qualquer lugar. Fora da classe o aluno poderá estudar em diversos ambientes. O aplicativo tira a função do aprendizado apenas dos ouvidos e olhos, apenas do aprender e decorar. Ele cria experiências necessárias para a absorção de uma matéria. Desafia a capacidade de investigação. O aplicativo é chamativo com as suas ferramentas o que cria à vontade nos estudantes de explorar o que ele é capaz de fazer, aumentando assim o aprendizado. (HALLAL et al., 2016)

Para os professores, o *Software* permite que a aula seja mais dinâmica, e tem grande vantagem, pois o aplicativo é fácil e pode ser incorporado em uma aula. Usar o aplicativo aumenta o interesse na aula, visto que possui uma infinidade de recursos, onde você pode criar a aula da forma que quiser, como achar que os seus alunos irão ter maior interesse e assim aumentar a produtividade da aula. Além disso, tem conectividade em todo o mundo, e os usuários do Geogebra fazem parte de uma comunidade mundial que troca informações e experiências, o que faz com que o professor não só ensine, como também aprenda. (HALLAL et al., 2016)

Um dos diferenciais deste programa em relação aos outros *Software*s de Geometria Dinâmica é o fato de se poder acessar as funções, tanto via botões na Barra de Ferramenta, quanto pelo Campo de Entrada. Além disso, pode-se alterar as propriedades dos objetos construídos utilizando a Janela de Álgebra e também por meio de algumas ferramentas do Botão Direito do Mouse.

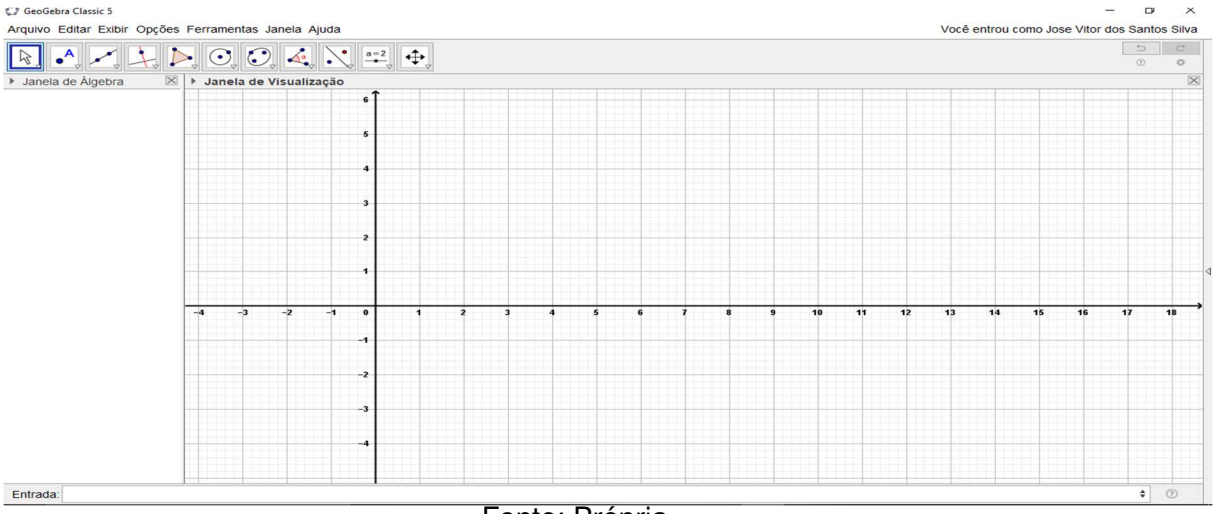
3.2 Interface e Ferramentas do *Software* Geogebra

Com intuito de facilitar as nossas construções futuras, veremos as principais ferramentas, visto que muitas pessoas não tem nenhum conhecimento a respeito do *software*, são várias ferramentas disponíveis para uso.

3.2.1 Tela inicial do Geogebra

O usuário ao abrir o *software*, se deparará com a respectiva tela abaixo:

Figura 3 - Tela inicial

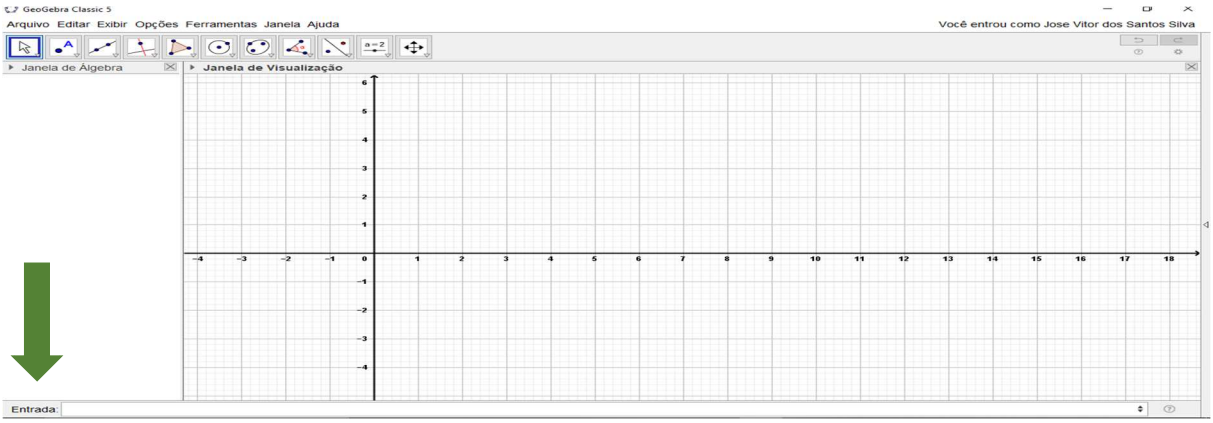


Fonte: Própria

3.2.2 Barra de entrada

A barra de entrada fica localizada na parte inferior da janela do geogebra, e permite que seja inserido coordenadas, equações e funções diretamente pelo teclado criando e modificando os objetos diretamente, usando suas representações algébricas ou utilizando comandos.

Figura 4 - Barra de entrada



Fonte: Própria

3.2.3 Barra de Ferramentas

A barra de ferramentas localizada na parte superior do Geogebra é dividida em janelas, e em cada janela possui várias ferramentas que auxiliam na construção de pontos, retas, figuras geométricas, obter medidas de objetos construídos, entre

outros. Para visualizar tais ferramentas, deve-se clicar sobre a seta no canto do ícone, e então aparecerá as opções referentes a estas janelas.

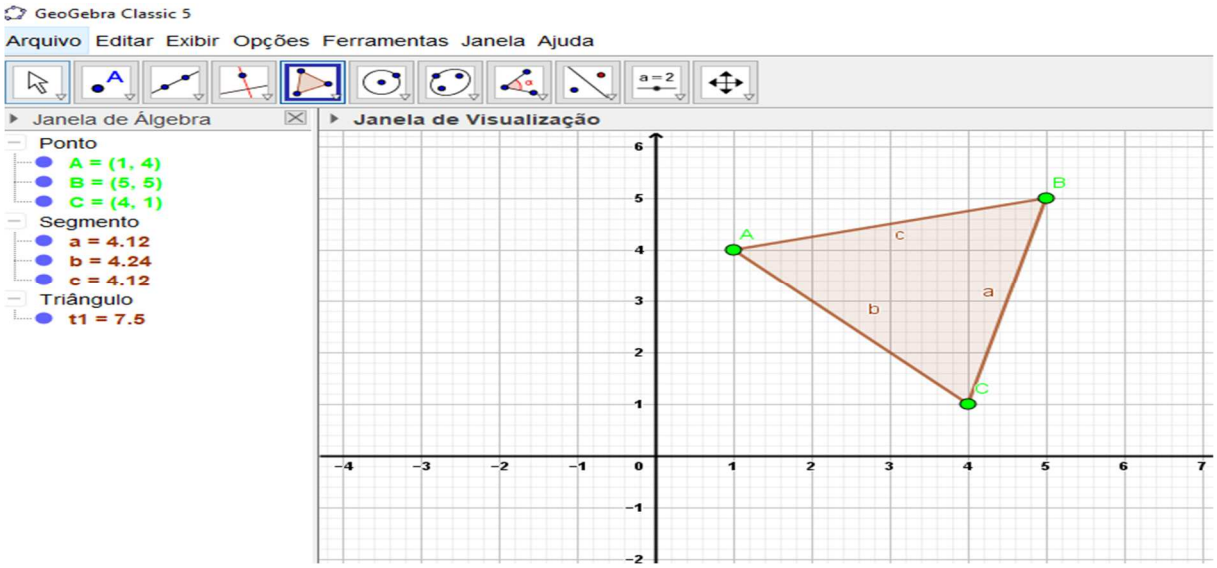
Figura 5 - Barra de ferramentas

Fonte: Própria

3.2.4 Janela de Visualização versus Janela de Álgebra

Um objeto criado pode possui mais de uma representação: geométrica e aritmética ou algébrica. A janela de visualização, apresenta as representações gráficas de pontos, vetores, segmentos, polígonos, funções, retas e cônicas no plano e no espaço, os quais são inseridos na janela algébrica ou na entrada de texto.

Figura 6 - Janela de Álgebra e Janela de Visualização



Fonte: Própria

Observe que na janela de Visualização está representado geometricamente um triangulo com vértices A, B e C e lados a, b e c.

Já na janela de álgebra que fica ao lado esquerdo da janela de visualização, são exibidas as coordenadas dos vértices do triangulo, a medida de cada um dos lados e a área do triangulo.

3.2.5 Ferramenta para criar um ponto

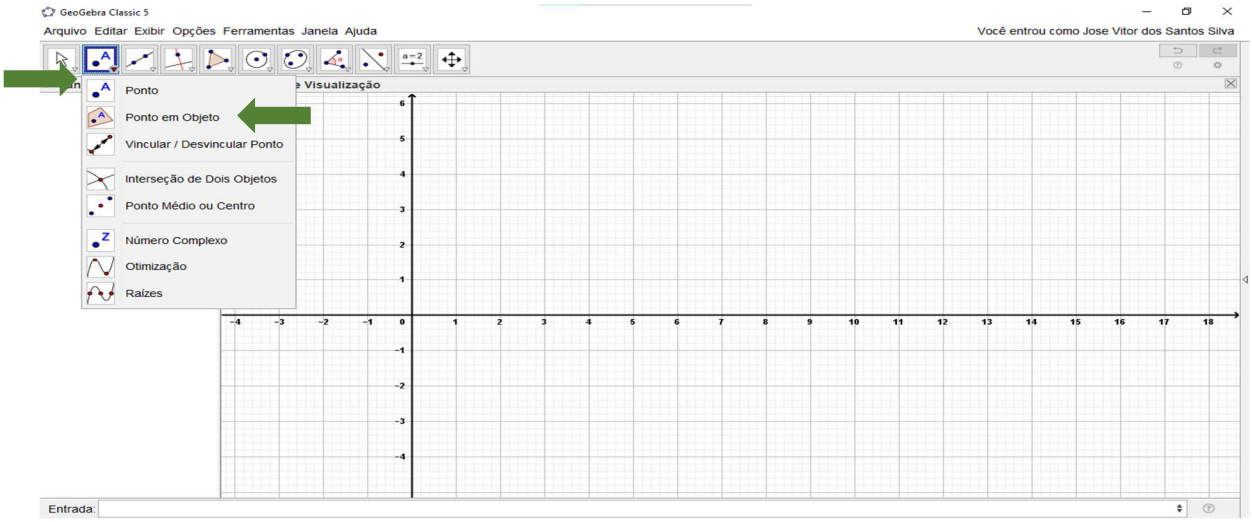
Um ponto pode ser criado selecionando a ferramenta ponto na primeira janela na barra de ferramentas ou então inserindo as coordenadas do ponto na barra de entrada.

Ao clicar em um segmento, reta, polígono, cônica, gráfico de função ou curva, também pode ser criado um ponto nesse objeto. Para anexar um ponto a um determinado objeto, primeiro deve se clicar em um ponto livre e, em seguida, sobre o objeto para o qual você deseja anexar.

Os pontos de interseção de dois objetos podem ser criados selecionando dois objetos, assim todos os pontos de intersecção serão criados; ou então, clicando-se diretamente sobre uma intersecção de duas linhas, assim apenas um ponto de intersecção será criado.

Já para obter o ponto médio entre dois pontos ou o ponto médio de um segmento, basta selecionar a ferramenta, e em seguida clicar em dois pontos ou em um segmento para obter o respectivo ponto médio.

Figura 7 – Ferramenta para adicionar um ponto

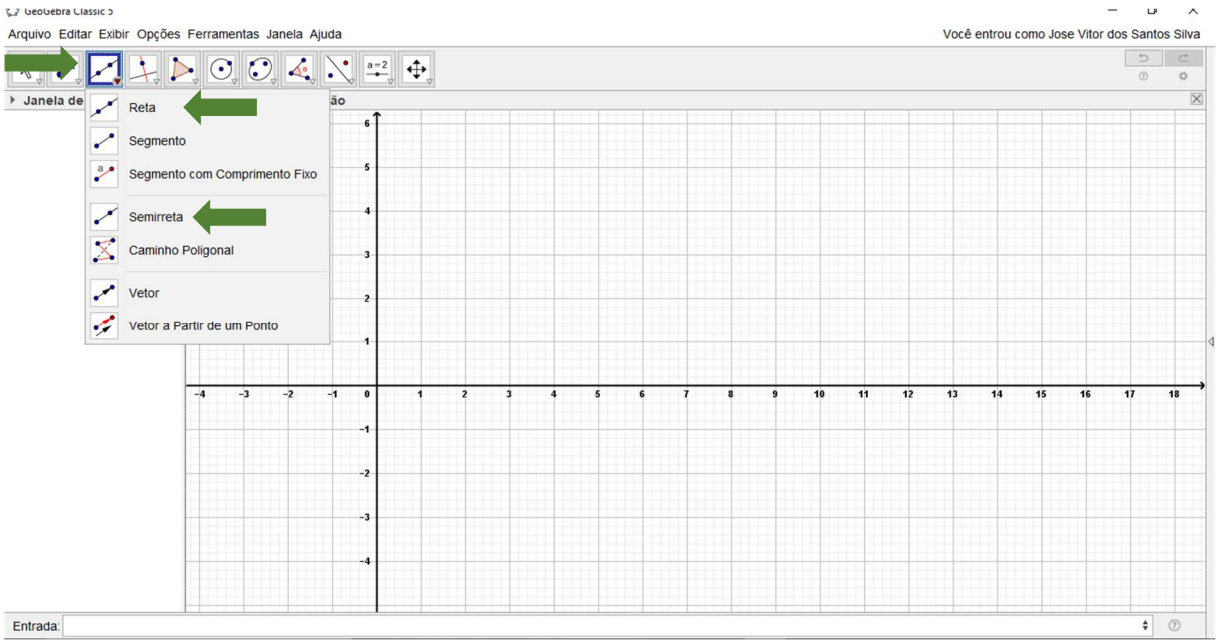


Fonte: Própria

3.2.6 Ferramenta para criar retas e semirretas

Uma reta pode ser criada selecionando a ferramenta reta na terceira janela na barra de ferramentas, em seguida clicando em dois pontos na janela de visualização ou então pela barra de entrada inserindo o comando: Reta(<Ponto>; <Ponto>).

Figura 8 – Ferramenta para criar uma reta



Fonte: Própria

Por exemplo, para construir uma reta que passa pelos pontos (2, 3) e (1, 2), basta inserir o seguinte comando na Entrada.

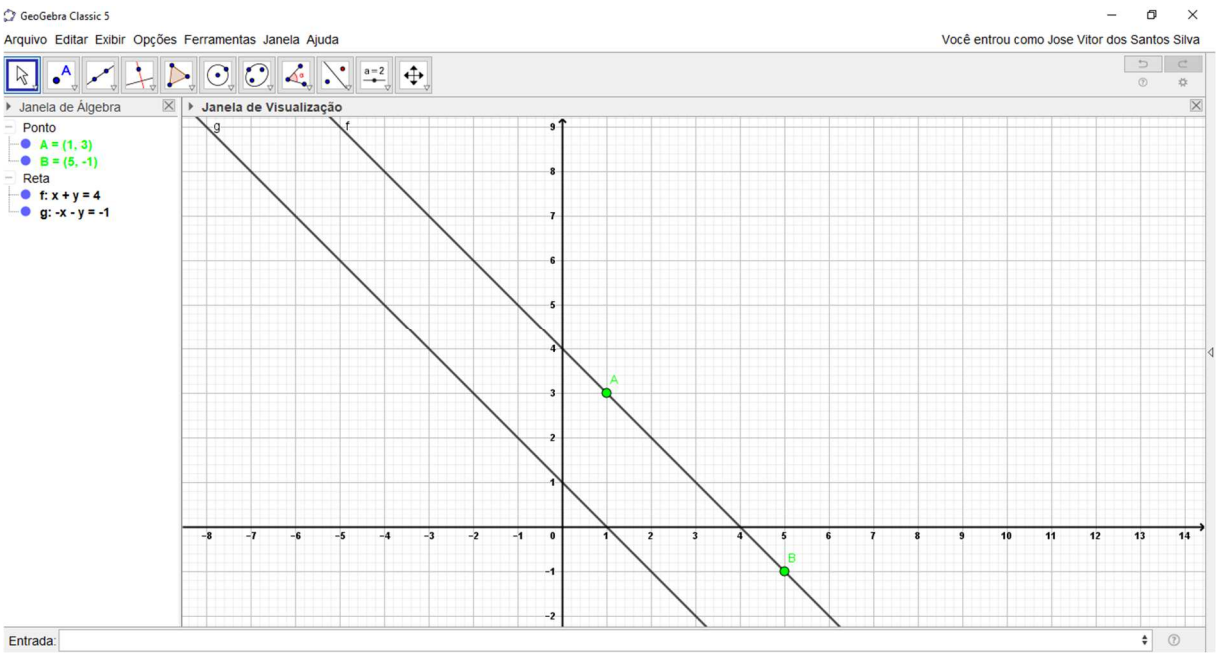
Figura 9 - Comando para criar uma reta

Fonte: Própria

Na imagem abaixo as retas foram construídas utilizando a ferramenta reta e outra através do comando na barra de entrada.

A reta *f* foi construída utilizando a ferramenta *Reta* e, em seguida, clicando-se em dois pontos na Janela de Visualização. A reta *g* foi construída digitando na barra de entrada o comando: Reta ((0, 1), (-1, 2)).

Figura 10 - Representação de Retas no Geogebra

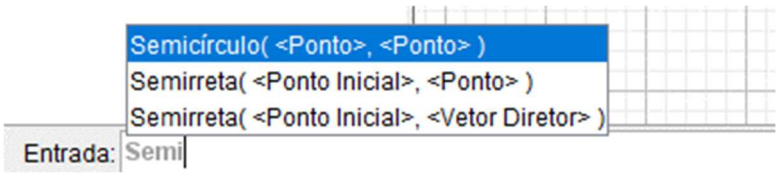


Fonte: Própria

A construção de semirretas é análoga ao das retas, clicando-se na opção Semirreta e, em seguida, clicar em dois pontos na Janela de visualização.

Digitando o comando Semirreta na barra de entrada, o Geogebra apresentará duas possibilidades de sintaxe.

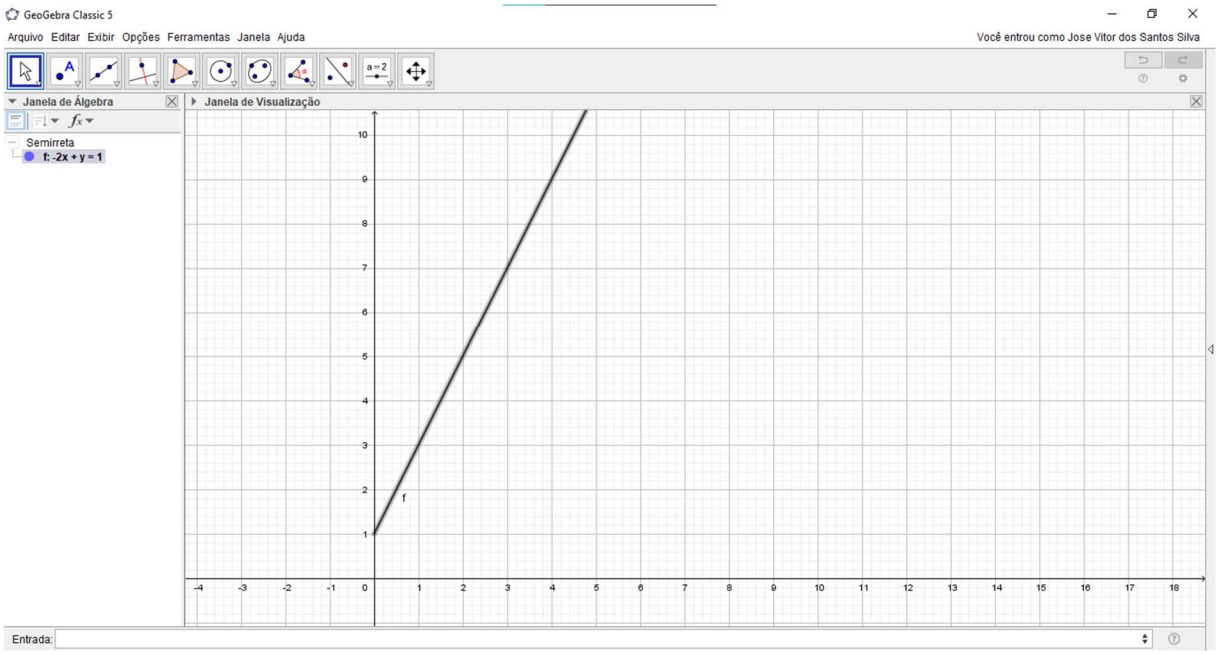
Figura 11 - Comando para criar uma semirreta



Fonte: Própria

Na primeira sintaxe, é necessário digitar dois pontos para um obter uma semirreta. Por exemplo, ao digitar Semirreta ((0,1), (1,3)), constrói se uma semirreta com origem em (0,1) passando por (1,3).

Figura 12 - Representação de Semirretas no Geogebra



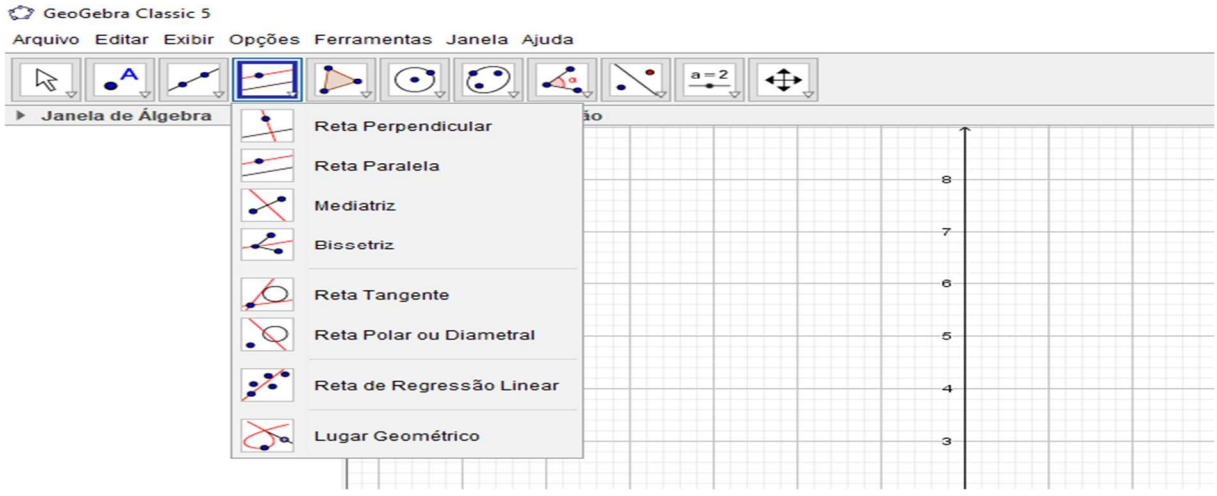
Fonte: Própria

Já na segunda sintaxe, se faz necessário a construção de um vetor previamente ou alinhar o comando Vetor no comando Semirreta. Por exemplo, digitando-se Semirreta ((0,0), u), constrói se uma semirreta com origem em (0,0) e paralela ao vetor u previamente construído.

3.2.7 Ferramenta para criar retas perpendiculares, Paralelas e Tangentes

A construção de retas perpendiculares, paralelas e tangentes podem ser criadas utilizando as ferramentas da quarta janela da barra de ferramentas.

Figura 13 - Ferramenta para adicionar retas perpendiculares, paralelas



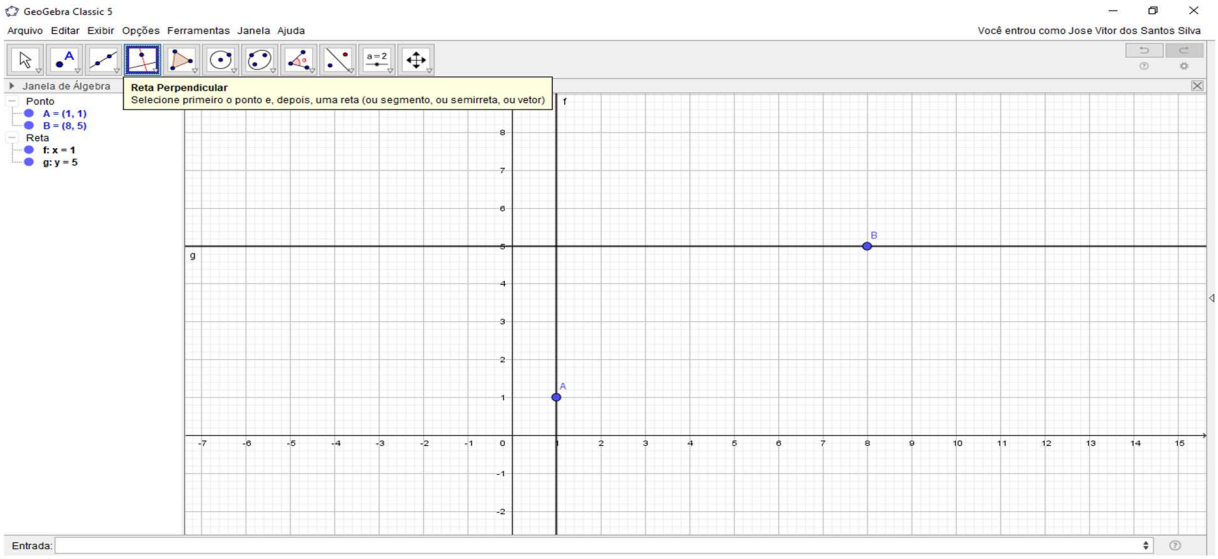
Fonte: Própria

3.2.7.1 Retas Perpendiculares

Através da ferramenta Reta Perpendicular podemos construir retas perpendiculares a uma reta, a uma semirreta, a um segmento e a um vetor. Para construir uma reta perpendicular a uma reta, basta clicar na ferramenta Reta Perpendicular e, em seguida, clicar na reta e por último clicar em um ponto sobre a reta ou não pertencente a ela.

Na figura abaixo a reta *g* é perpendicular à reta *f* por um ponto A não pertencente a *f.* A reta *h* é perpendicular à reta *f* por um ponto B pertencente a *f.*

Figura 14 - Retas Perpendiculares

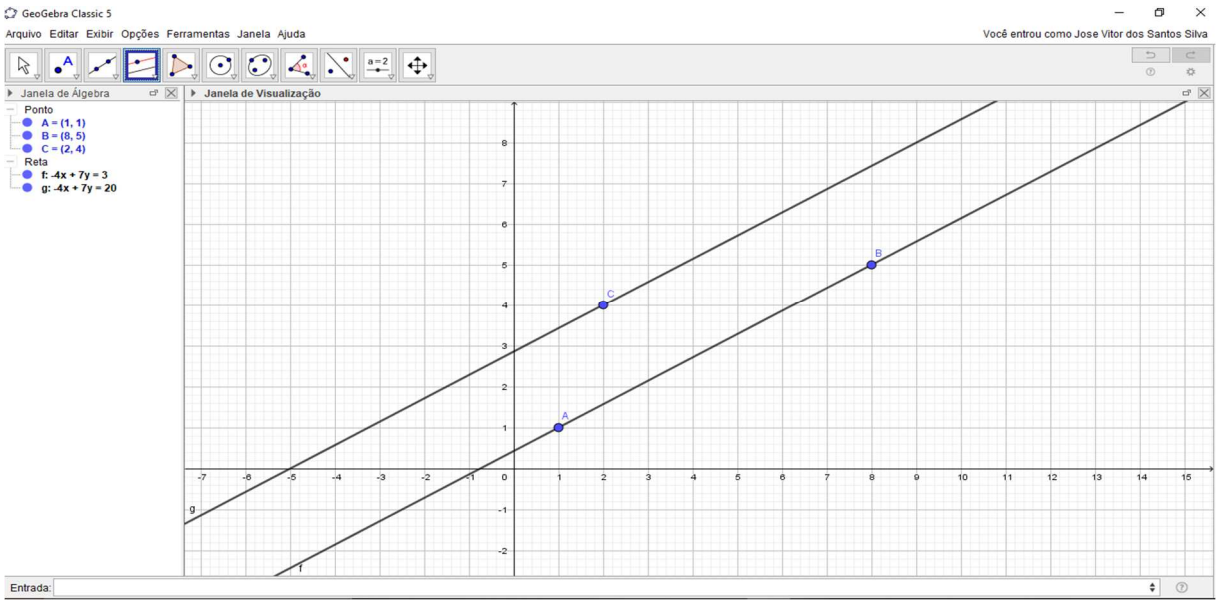


Fonte: Própria

3.2.7.2 Retas Paralelas

Para construir retas paralelas primeiramente clicamos no ícone Reta Paralela, em seguida clicamos em um dos objetos para o qual se deseja construir uma reta paralela, ou seja, em uma reta, semirreta, segmento de reta ou vetor. Por último, clicamos sobre um ponto para que seja construída e exibida a reta paralela.

Figura 15 - Retas Paralelas

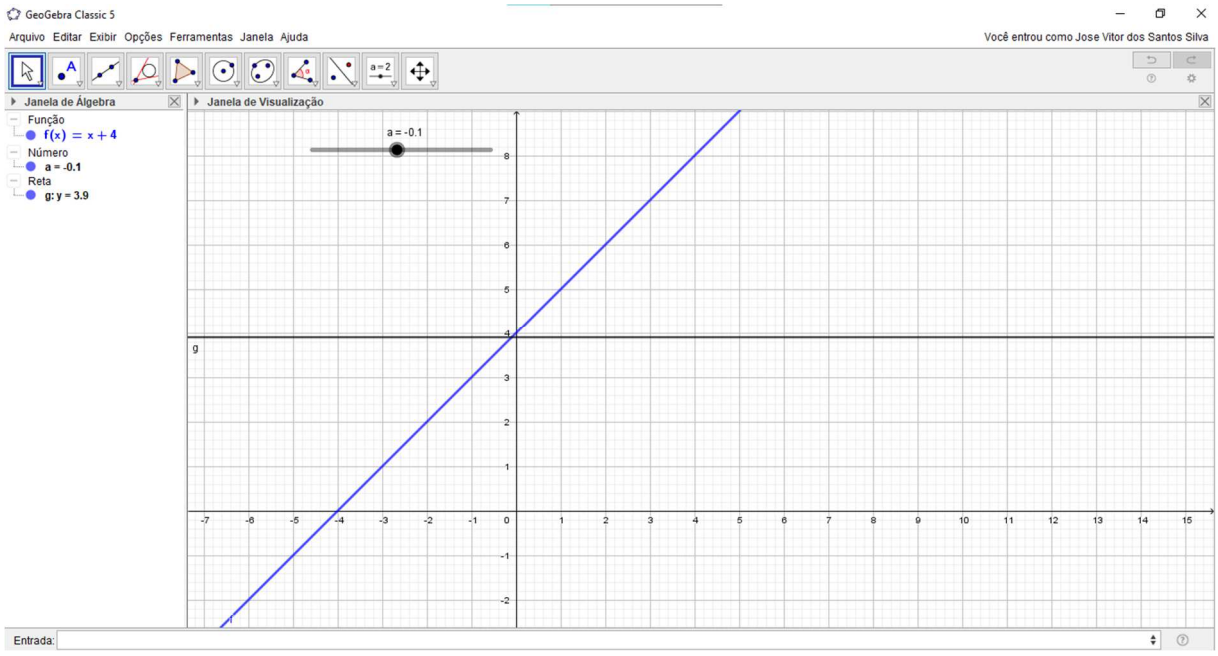


Fonte: Própria

3.2.7.3 Retas Tangentes

Para criar retas tangentes a uma circunferência, cônica ou função, a partir de um determinado ponto, deve-se clicar em um ponto e depois no objeto ao qual a reta será tangente.

Figura 16 – Reta Tangente



Fonte: Própria

3.2.8 Funções

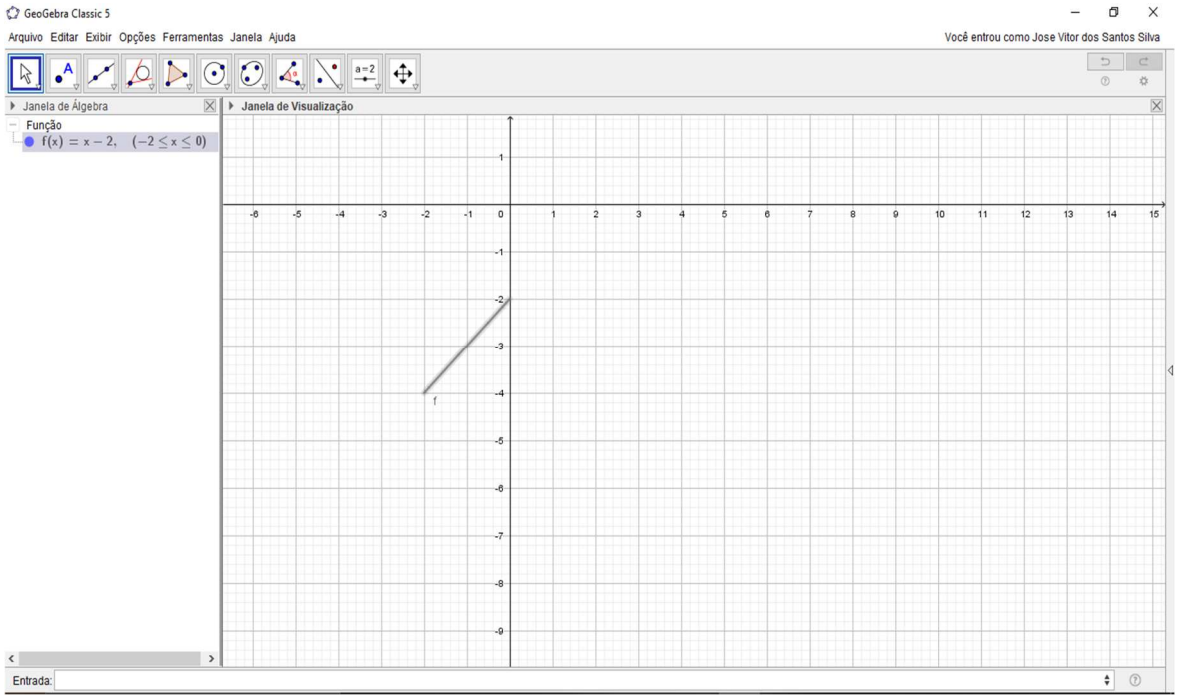
Entre as várias ferramentas e funcionabilidades que o Geogebra possui, existe o comando *Função* que tem a seguinte sintaxe:

Função(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)

Com esse comando obtemos uma função representada graficamente na Janela de Visualização e algebricamente na Janela de Álgebra.

Ao digitarmos *f(x)= Função(x-2,-2,0)* na barra de entrada, obteremos a seguinte representação gráfica:

Figura 17 - Representação Gráfica de Funções



Fonte: Própria

É possível construir uma função sem utilizar o comando Função, por exemplo para construir a função *h(x) = 4x-3,* basta digitar uma das duas sintaxes a seguir:

- *h(x) = 4x-3*
- *4x -3*

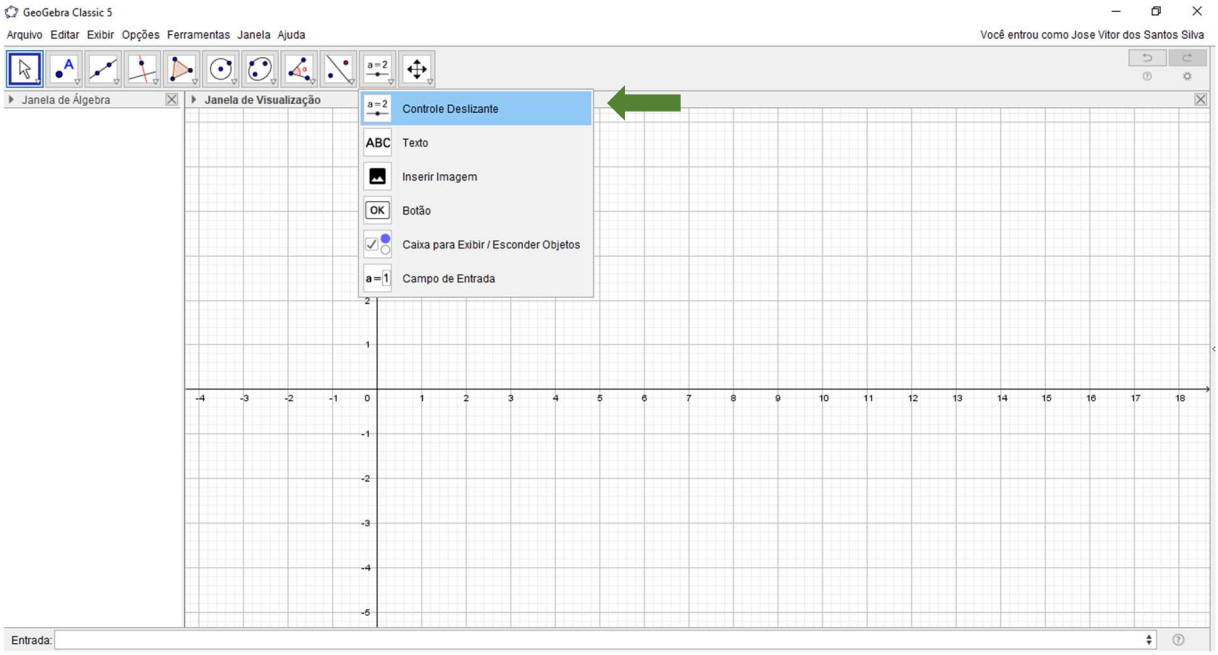
Nesses casos não é possível delimitar o intervalo conforme foi feito no exemplo anterior.

3.2.9 Controle Deslizante

O uso de controles deslizantes permite analisar funções de forma dinâmica, pois, podemos utiliza-los para definir vários parâmetros de uma função: limites de intervalos em que a função é definida, coeficientes da função, expoentes de uma função polinomial, entre outros, tais parâmetros permite a possibilidade de variar objetos, garantindo um dinamismo nas representações e a manipulação de conceitos antes abstratos.

Para criar um controle deslizante, basta ativar a ferramenta na janela de ferramentas e clicar sobre o local desejado na janela de visualização. Feito isto, aparecera uma janela onde é possível nomear, especificar o intervalo e incremento, além de permitir a alteração das propriedades do controle deslizante.

Figura 18 - Ferramenta para criar um controle deslizante



Fonte: Própria

4 A DERIVADA NO GEOGEBRA

Usaremos o Geogebra para estudo e interpretação geométrica da derivada de uma função em um determinado ponto, com o objetivo de compreender o conceito de derivada.

Como já visto, a derivada de uma função $f(x)$ num ponto $x = x_0$, é igual ao valor da tangente trigonométrica do ângulo formado pela tangente geométrica á curva representativa de $f(x)$, no ponto $x = x_0$, ou seja, a derivada é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto x_0.

Para que possamos construir geometricamente a derivada de uma função $f(x)$ em um determinado ponto, devemos inserir na barra de entrada alguns comandos, conforme os passos abaixo:

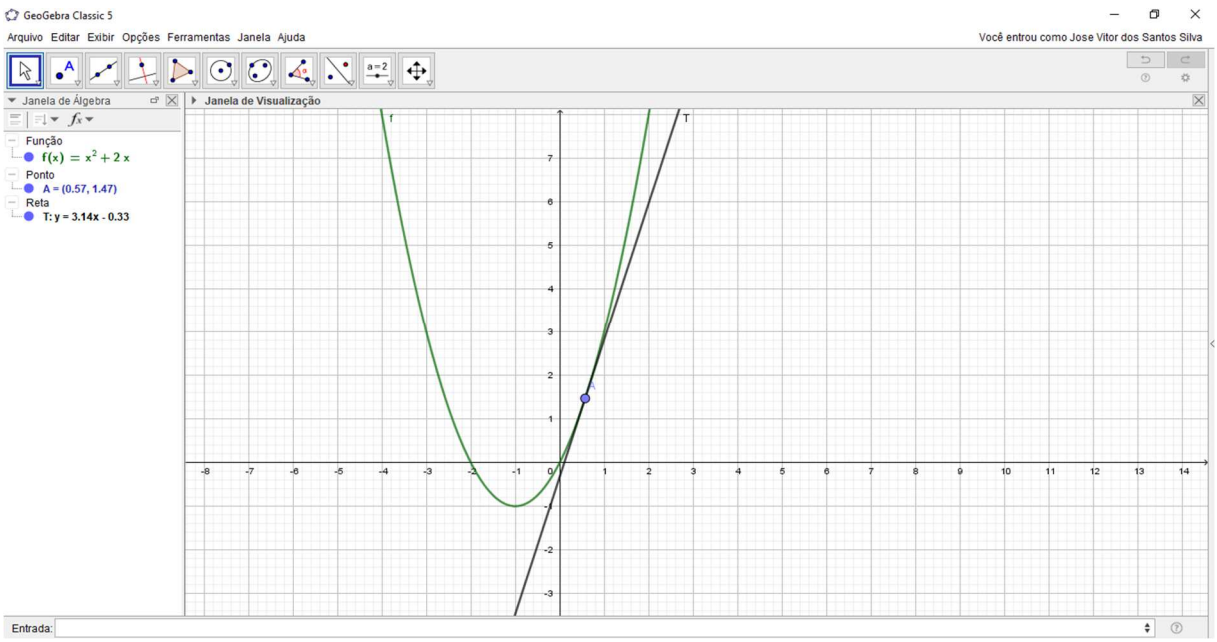
1º passo: Digitar a função $f(x)$ a qual pretende-se determinar a derivada, na barra de entrada;

2º passo: Inserir na barra de ferramenta, um ponto sobre a função f, a qual chamaremos de A;

3º passo: Digitar na barra de entrada *Tangente [A, f]*, a reta tangente *T* de f, condicionada ao ponto A.

Após os três primeiros passos, obtém-se a seguinte imagem:

Figura 19 - Primeiros Passos

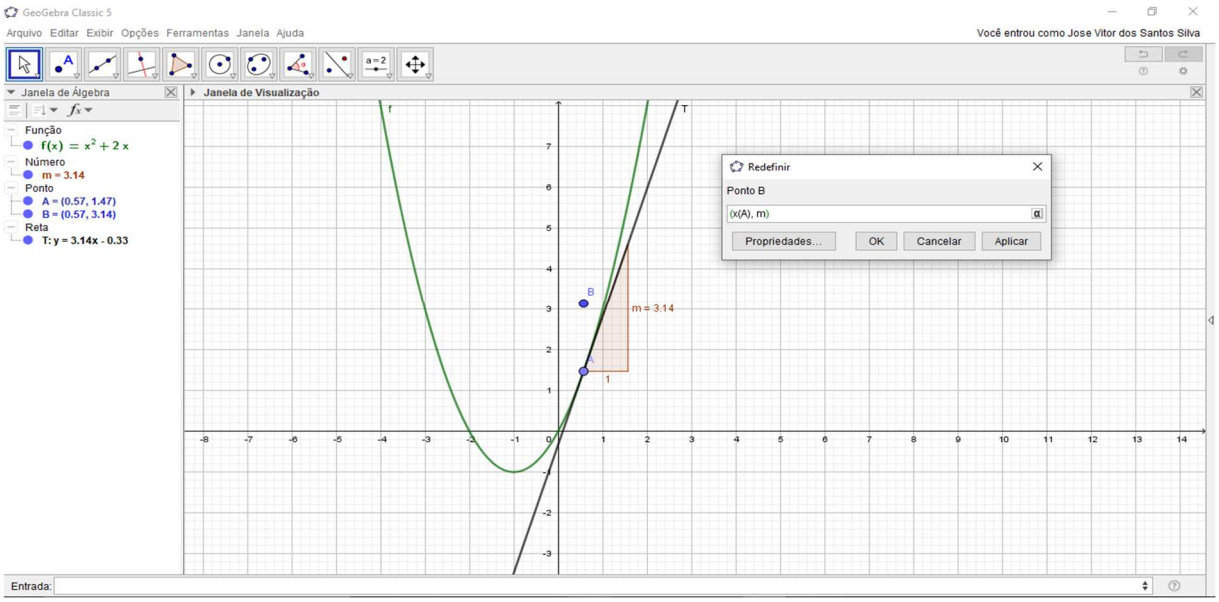


Fonte: Própria

4º passo: Digitar na barra de entrada *Inclinação*[*g*], a inclinação da reta tangente, a qual chamaremos de *a;*

5 º passo: Inserir na barra de ferramentas, um segundo ponto, em que a abscissa será $x(A)$ e a ordenada será *a*, e nas configurações, habilitar o rastro do ponto.

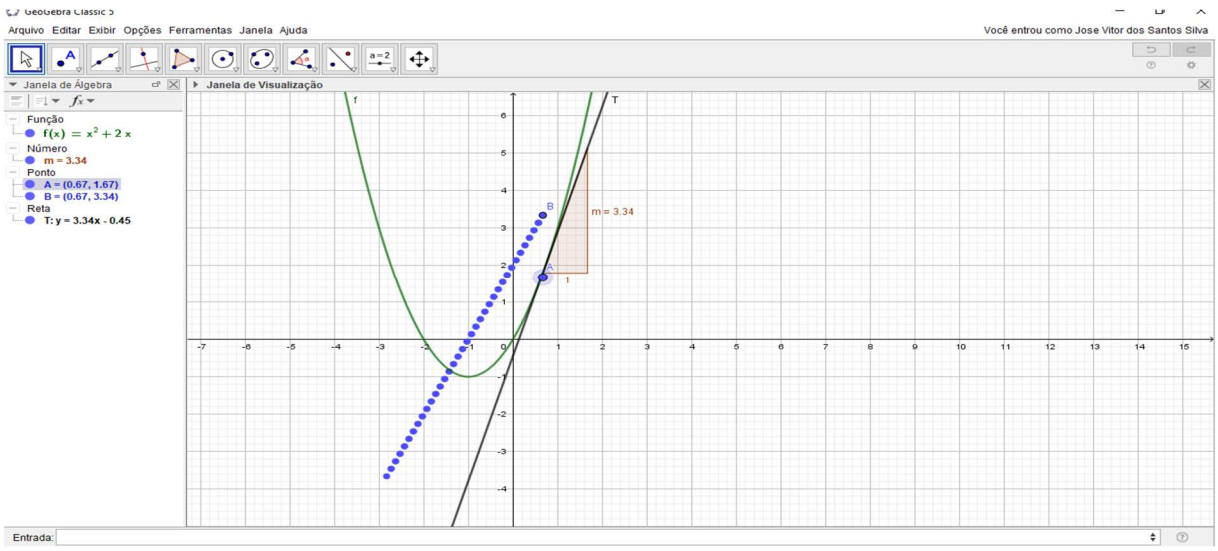
Figura 20 - Segundos passos



Fonte: Própria

À medida em que o ponto A percorre a função $f(x) = x^2 + 2x$, o ponto B vai dando forma a uma reta, que é a derivada da função f.

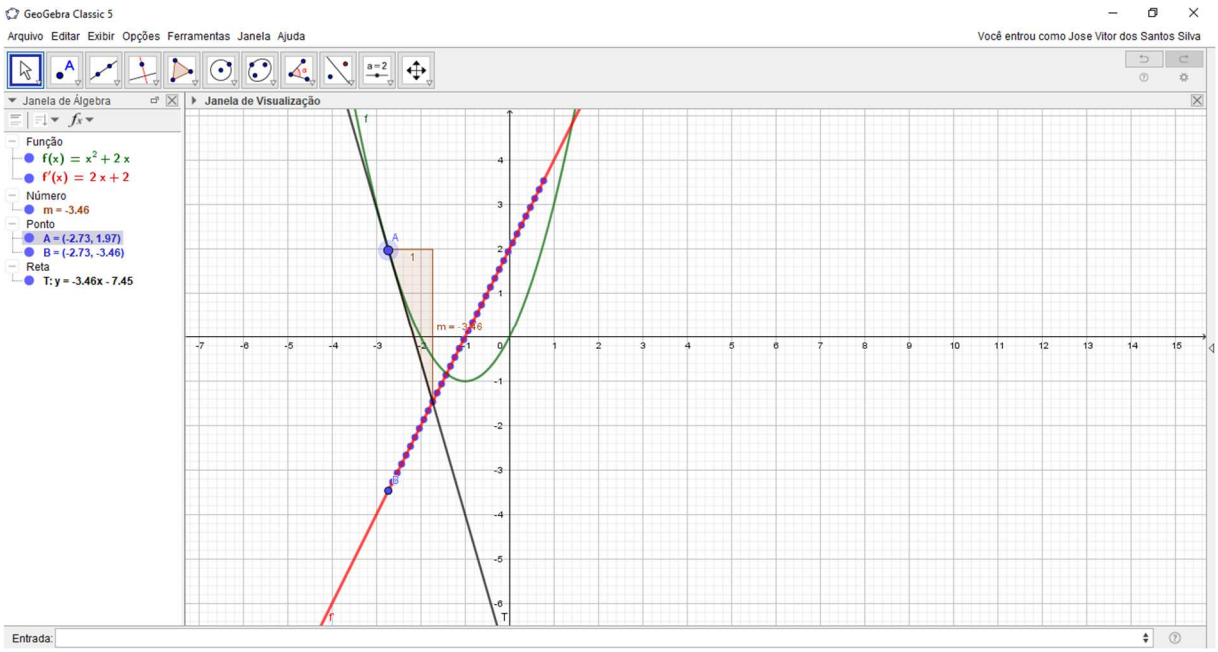
Figura 21 – Últimos passos



Fonte: Própria

6º passo: Digitar na barra de entrada *Derivada[F]*, para que seja feito a construção geométrica da derivada f' da função $f(x)$, que coincidirá com a reta que se formou pelo rastro do ponto *B*.

Figura 22 - Último passo



Fonte: Própria

Primeiramente foi feita a interpretação geométrica da derivada, o que foi confirmada no fim com a construção, adicionando na barra de entrada a derivada.

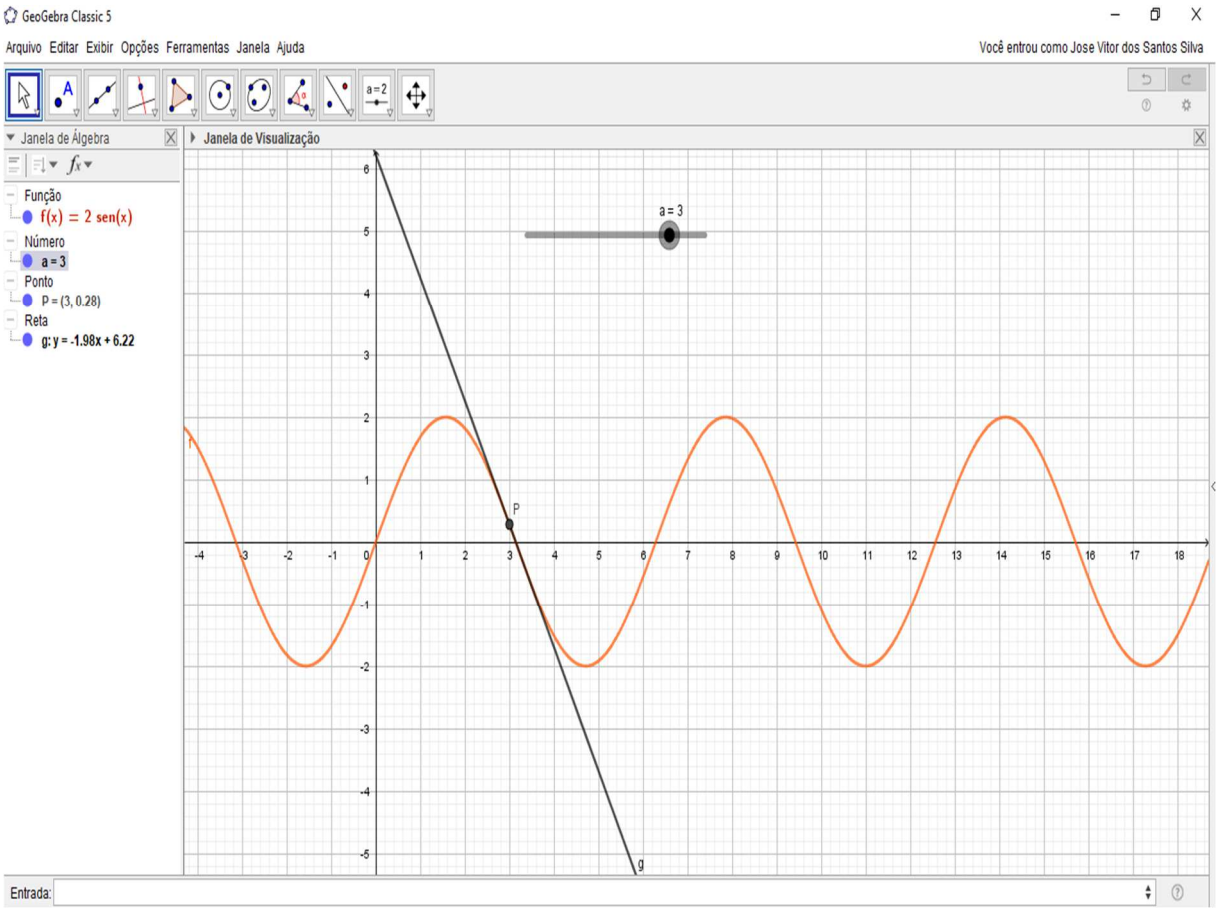
Vejamos um exemplo o qual deve ser traçado a reta tangente à função $f(x) = 2sen(x)$ no ponto cuja abscissa vale 3.

Para encontrarmos a solução, devemos inserir os seguintes dados no campo de entrada:

- $f(x) = 2 * sen(x)$, que é a função que será utilizada
- $a = 3$, o valor da abscissa no ponto $(a, f(a))$;
- $P = (a, f(a))$ o ponto que Tangencia da Reta;
- $Tangente[P, f]$;

A solução resultante será conforme a figura a seguir.

Figura 23 - Reta tangente a função



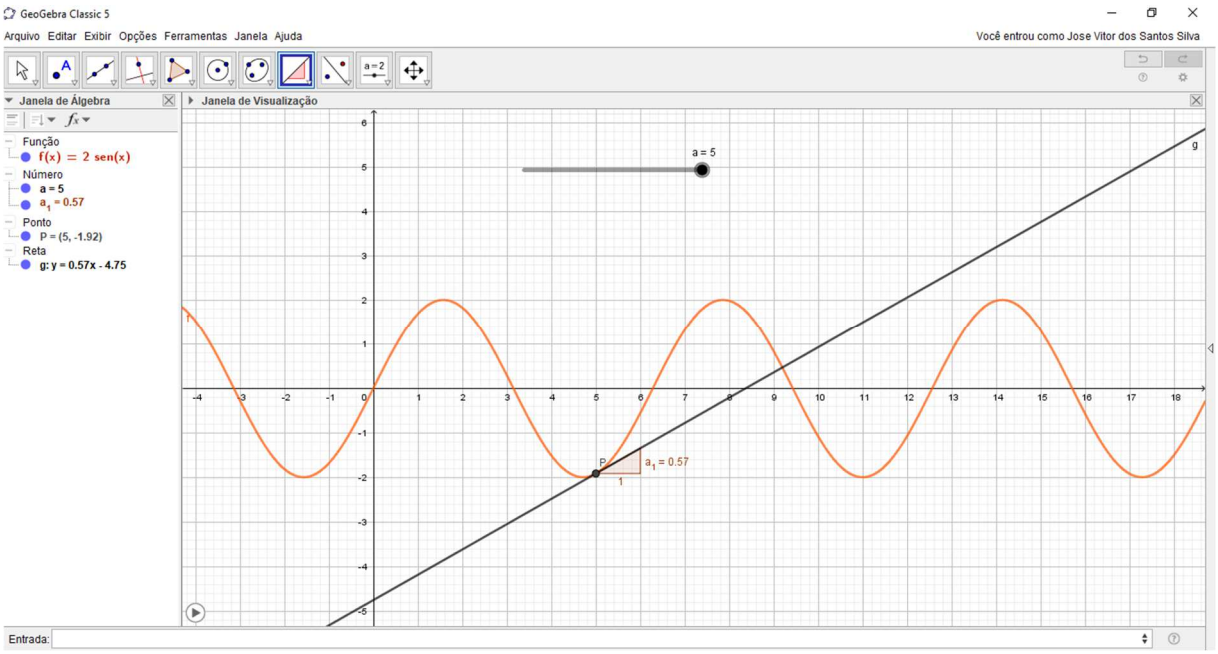
Fonte: Própria

Na janela de álgebra aparecerá o valor de *a*, o que nos permite variar o valor de *a* e, consequentemente a posição da reta tangente ao gráfico.

Através das construções geométricas dos exemplos anteriores foi possível observar o comportamento do gráfico da função derivada, e além disso, através da construção interpretar e determinar a derivada de uma determinada função, sendo assim para calcular o valor de uma derivada em um ponto, basta calcular o valor da inclinação da reta tangente ao gráfico no respectivo ponto.

No caso da função $f(x) = 2 * sen(x)$ se quisermos saber $f'(5)$, podemos calcular a inclinação da reta no ponto cuja abscissa vale 5. Para tal, devemos alterar o valor de a para $a = 5$, e em seguida selecionar a ferramenta inclinação e posteriormente a reta.

Figura 24 - Inclinação da reta no ponto de abscissa igual a 5



Fonte: Própria

4.1 Proposta De Sequência Didática Para Uso Do Geogebra

Após aprofundar os estudos sobre o software e explorar seus recursos, foi desenvolvida uma sequência didática para uso nas aulas, utilizando as ferramentas básicas do software, com o intuito de auxiliar os alunos na interpretação geométrica de derivadas.

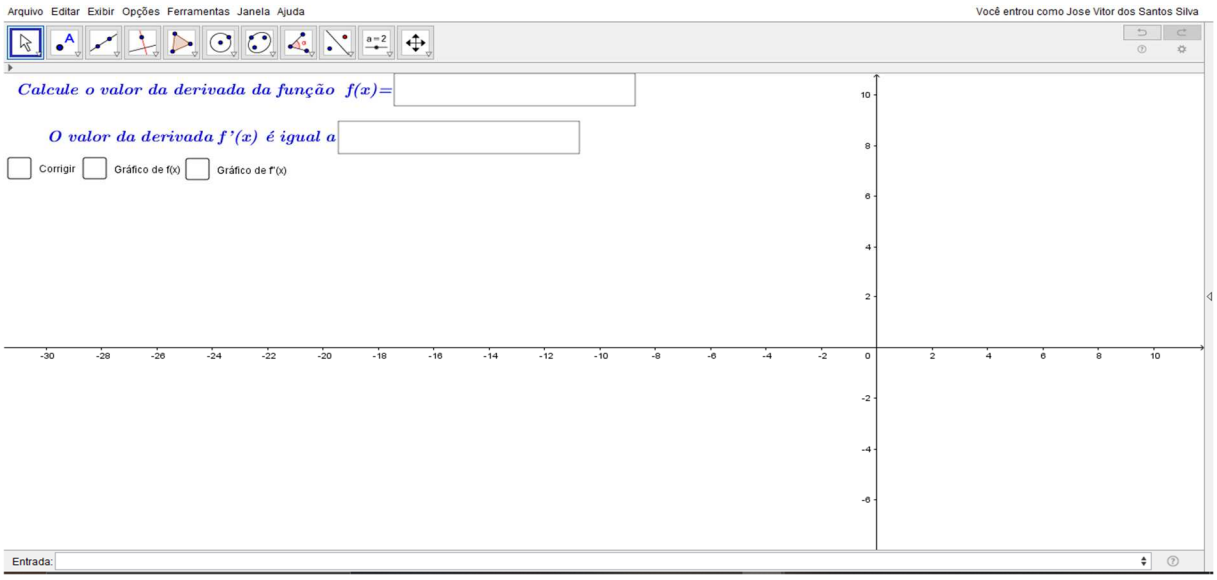
Do ponto de vista de Zabala (1998, p. 18) sequências didáticas são um "conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos".

A sequência didática desenvolvida permite a exploração do gráfico da função $f(x)$, a representação geométrica da derivada $f'(x)$, os quais serão construídos no software GeoGebra, contribuindo para a aprendizagem na interpretação de gráficos de derivadas, por meio da visualização.

Através da visualização das construções algébricas, o aluno tem a possibilidade de entender geometricamente os resultados algébricos que em boa parte das vezes os cálculos não são suficientes para que o aluno tenha um bom entendimento do assunto.

De forma simples e precisa, o aluno informará na interface do *software* a função a qual deverá ser calculada a derivada, seguido do respectivo valor obtido através dos cálculos. Dentre as opções de visualização, o aluno terá a opção de exibir o gráfico da função $f(x)$, bem como o gráfico da derivada $f'(x)$, por fim o aluno terá a opção de conferir se o valor encontrado é de fato o valor da derivada $f'(x)$.

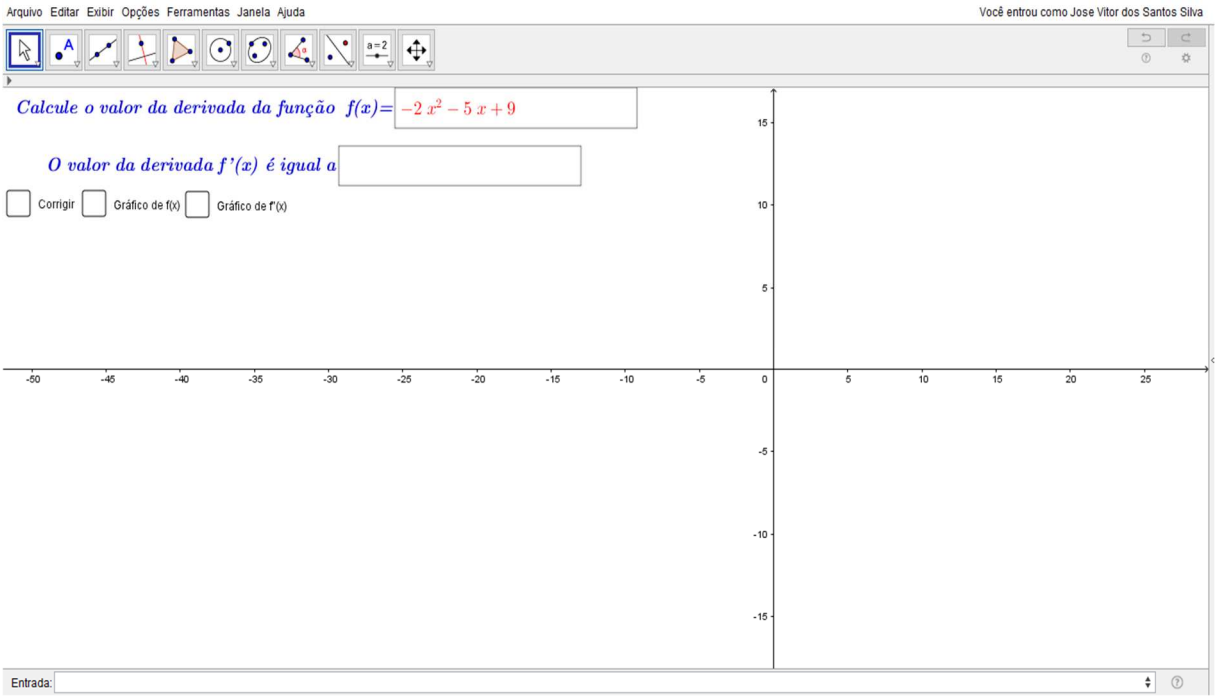
Figura 25 – Sequência didática desenvolvida



Fonte: Própria

Tomemos como exemplo a função $f(x) = -2x^2 - 5x + 9$ inicialmente deve ser digitada a função no campo especifico.

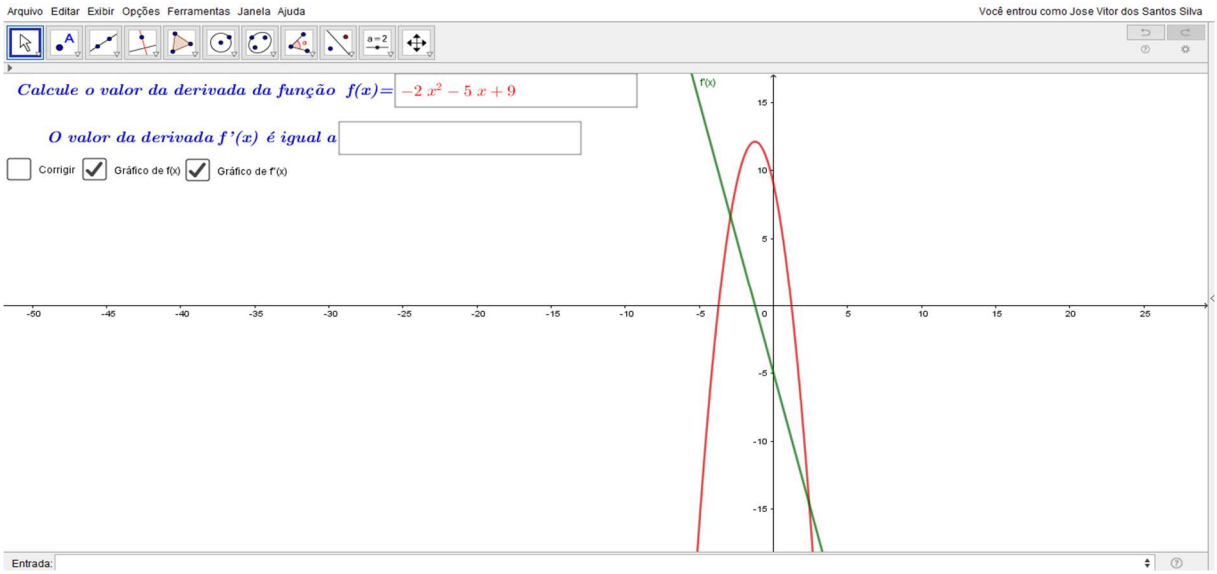
Figura 26 - Primeiro Passo da Sequência Didática



Fonte: Própria

Após inserir a função $f(x)$ no campo especifico, o aluno deverá escolher se quer que seja exibido o gráfico de $f(x)$ e/ou o gráfico de $f'(x)$, através da seleção das caixas de exibição.

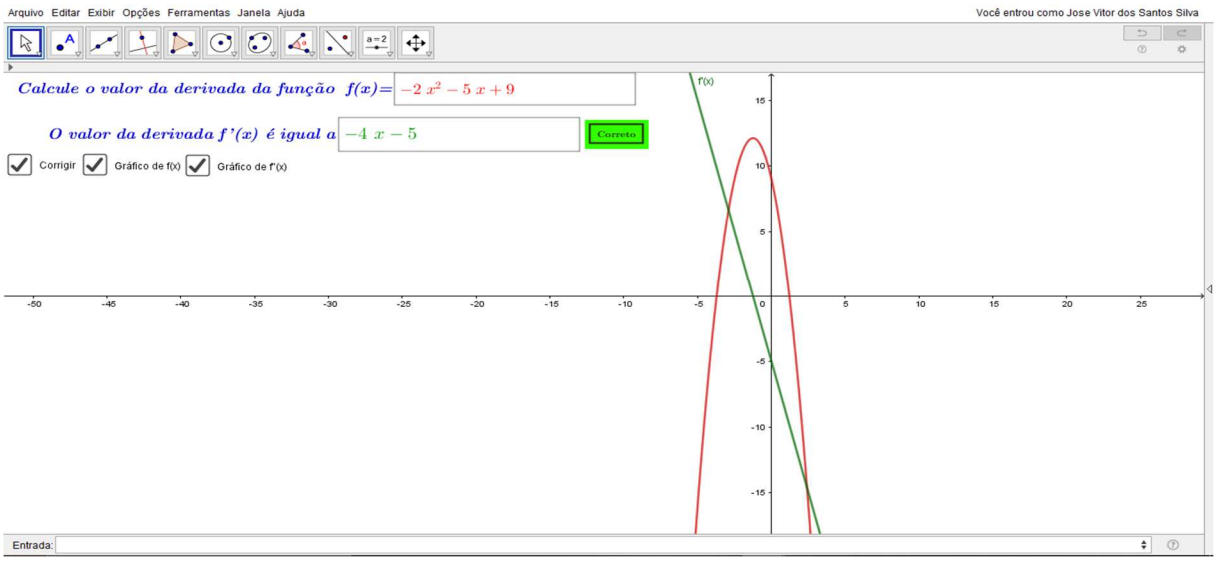
Figura 27 - Segundo Passo da Sequência Didática



Fonte: Própria

Seguido da visualização e paralelo aos cálculos feitos, o aluno deverá informar o valor da derivada $f'(x)$ no campo especifico e solicitar a correção automática do *software*.

Figura 28 - Ultimo Passo da Sequência Didática



Fonte: Própria

O *software* informará ao aluno se o valor informado é o valor correto da derivada $f'(x)$, bem como também se o valor estiver incorreto.

5 APLICAÇÕES

As derivadas possuem diversas aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento, o que faz com que muitos alunos diariamente questionem onde serão aplicados os conhecimentos que estão sendo abordados em sala de aula.

Dentre as principais aplicações das derivadas, a mais difundida é a de otimização de problemas, onde através das derivadas obtém-se a maximização ou minimização de determinado fenômeno.

Tradicionalmente esse tipo de aplicação é chamado de problemas de máximos e mínimos. Pois a meta é determinar os pontos onde a função (lucro, receita, custo, ...) alcança seus pontos de máximos ou mínimos.

Com o intuito de facilitar a compreensão acerca das aplicações das derivadas, usaremos o software Geogebra para fazer a representação geométrica, contribuindo assim para a visualização gráfica dos pontos de máximos e/ou mínimo. O geogebra permite a observação do comportamento do gráfico da derivada de uma função, o que facilita a compreensão e desperta no aluno a curiosidade.

A exploração do Geogebra é imprescindível para que o aluno compreenda dinamicamente o que está sendo apresentado enquanto manuseia e verifica as relações simultâneas entre as representações algébricas e gráficas.

5.1 Problemas de Máximos e Mínimos

Entre as aplicações das derivadas, os problemas de máximo e mínimo, consistem em encontrar os pontos onde uma função dada assume o seu maior valor (máximo) ou o menor valor (mínimo) em um determinado intervalo. Vejamos alguns exemplos de problemas que envolve máximos e mínimos.

Exemplo 1: O rancho New Country fabrica cuias de tereré com um custo mensal dado pela função $C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 10x + 20$. Cada cuia é vendida por R$31,00. Determine a quantidade de cuias que devem ser produzidas e vendidas para que o rancho tenha o máximo lucro mensal.

Solução: Observa que este se trata de um problema de maximização. Para isto, seja x a quantidade de cuias a ser produzida e vendida para dar o máximo lucro mensal.

O lucro mensal é dado por:

$$Lucro(L) = Receita(R) - Custo(C),$$

Sendo assim tem-se que:

$$L = R - C = 31x - (\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 10x + 20)$$

$$= 31x - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 10x - 20$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 21x - 20.$$

Ou ainda,

$$\mathrm{L(x)} = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 21x - 20.$$

Calculando a derivada primeira da função lucro, em relação a x, temos

$$\mathrm{L'(x)} = -\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} + 21 \text{ e } \mathrm{L''(x)} = -2\mathrm{x} + 4.$$

Agora, para calcular os pontos críticos de L é só igualar $L'(x)$ a zero, ou seja, $L'(x) = 0$ e vem $-\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} + 21 = 0$. Resolvendo esta equação pela fórmula de Bháskara, temos as raízes $x = -3$ e $x = 7$.

Logo, $\mathrm{x} = -3$ e $\mathrm{x} = 7$ são os pontos críticos de L.

Vamos determinar agora os extremos relativos de *L.*

Para $\mathrm{x} = -3$, temos $\mathrm{L''}(-3) = (-2) * (-3) + 4 = 10 > 0$, logo, é um ponto de mínimo relativo de *L.*

Para $\mathrm{x} = 7$, temos $\mathrm{L''}(7) = -2 * 7 + 4 = -10 < 0$, logo, é um ponto de máximo relativo de *L.*

Portanto, a quantidade a ser produzida e vendida para dar o máximo lucro mensal é $x = 7$.

Exemplo 2: José é dono de uma quitanda, e está precisando repor as vendas que teve de certos produtos, porem nas ultimas compras, José tem gastado muito dinheiro. Dessa vez, José quer gastar o menos possível para repor a saída que teve na venda de maças. O custo que José tem para comprar as maças é dado pela função abaixo:

$$C = \frac{M^2 + 100}{M}$$

Quantas maças José deve comprar para ter um custo mínimo, mas continuar tendo lucro?

Solução: Precisamos, portanto, determinar o ponto de mínimo para que José gaste menos.

Derivando a função *C* com relação a *M* através da regra do quociente, obtemos:

$$C' = \frac{M^2 - 100}{M^2}$$

Para encontrar o ponto máximo e mínimo, teremos que igualar a derivada a zero:

$$C' = \frac{M^2 - 100}{M^2} = 0$$

$$M^2 - 100 = 0$$

Resolvendo a equação, temos que $M = \pm 10$.

Como a quantidade de maças não pode ser negativa, o valor de $M = -10$ será desconsiderado, resultando no ponto crítico:

$$M = 10$$

Como queremos determinar o menor custo possível, devemos mostrar que M é um ponto de mínimo. Para isso, analisando o sinal da derivada a esquerda e a direita desse ponto, através do teste da primeira derivada. Podemos escolher $M = 5$ a esquerda e $M = 15$ a direita.

$$C'(5) = \frac{(5)^2 - 100}{(5)^2} = -\frac{75}{25}\ então\ C'(5) < 0$$

$$C'(15) = \frac{(15)^2 - 100}{(15)^2} = \frac{125}{225}\ então\ C'(15) > 0$$

Como a derivada é negativa a esquerda e positiva a direita, temos então o ponto de mínimo.

Portanto, José deve comprar 10 maças para ter um custo mínimo.

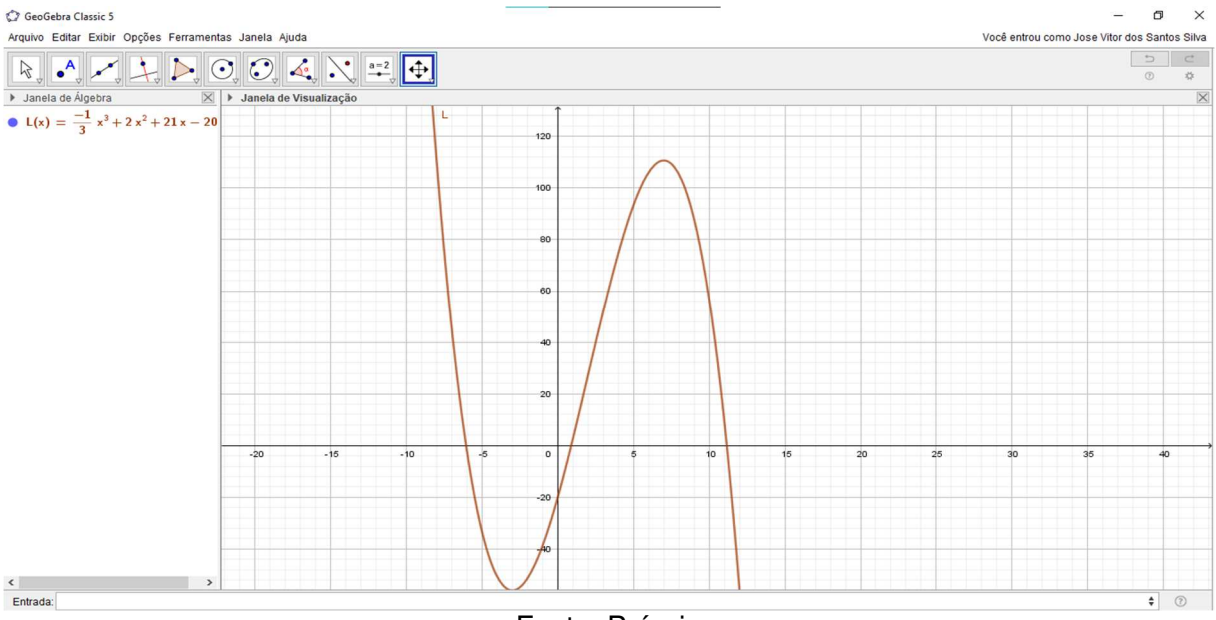
5.2 Desenvolvimento das aplicações no Geogebra

Para uma melhor compreensão acerca das aplicações das derivadas, as representações abaixo trata-se exclusivamente da representação geométrica no software Geogebra.

O exemplo 1 trata-se se um problema de maximização, portanto deve-se ser encontrado o ponto de máximo da função: $\mathrm{L(x)} = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 21x - 20$.

Inicialmente, fazemos a representação geométrica da função.

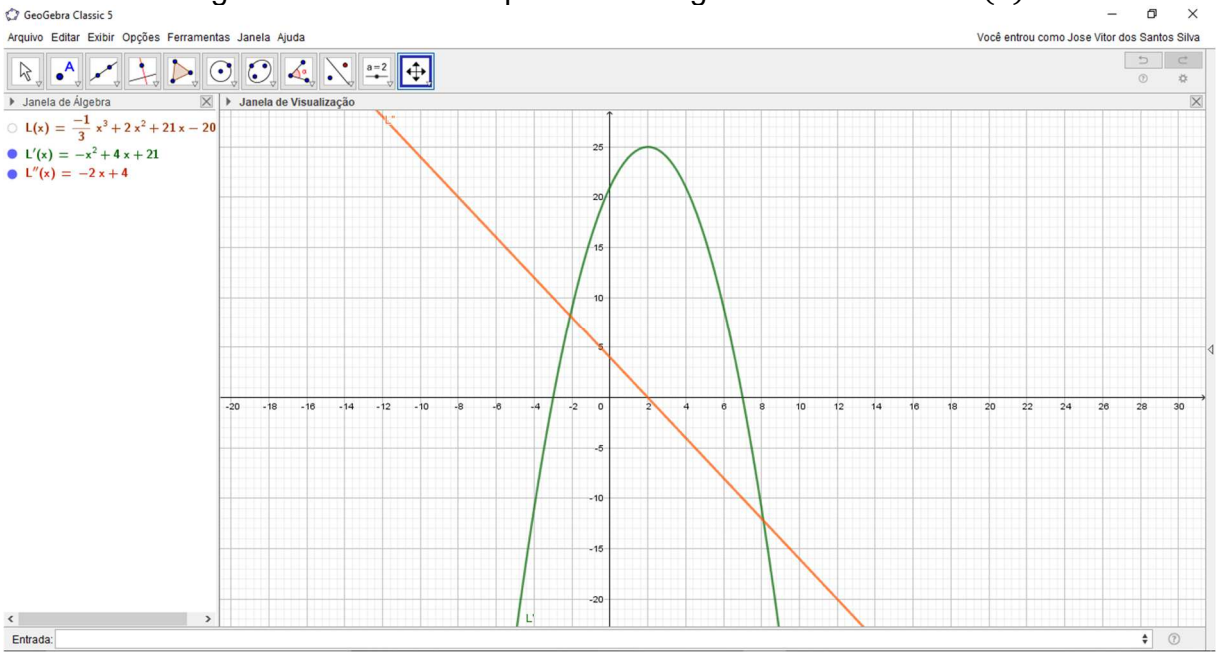
Figura 29 - Gráfico da função $\mathrm{L(x)} = -\frac{1}{3}\mathrm{x}^3 + 2\mathrm{x}^2 + 21\mathrm{x} - 20$.



Fonte: Própria

Após a representação da função $\mathrm{L(x)} = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 21x - 20$, devemos fazer a representação da derivada primeira da função $\mathrm{L(x)} = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 21x - 20$.

Figura 30 - Gráfico da primeira e segunda derivada de $L(x)$.

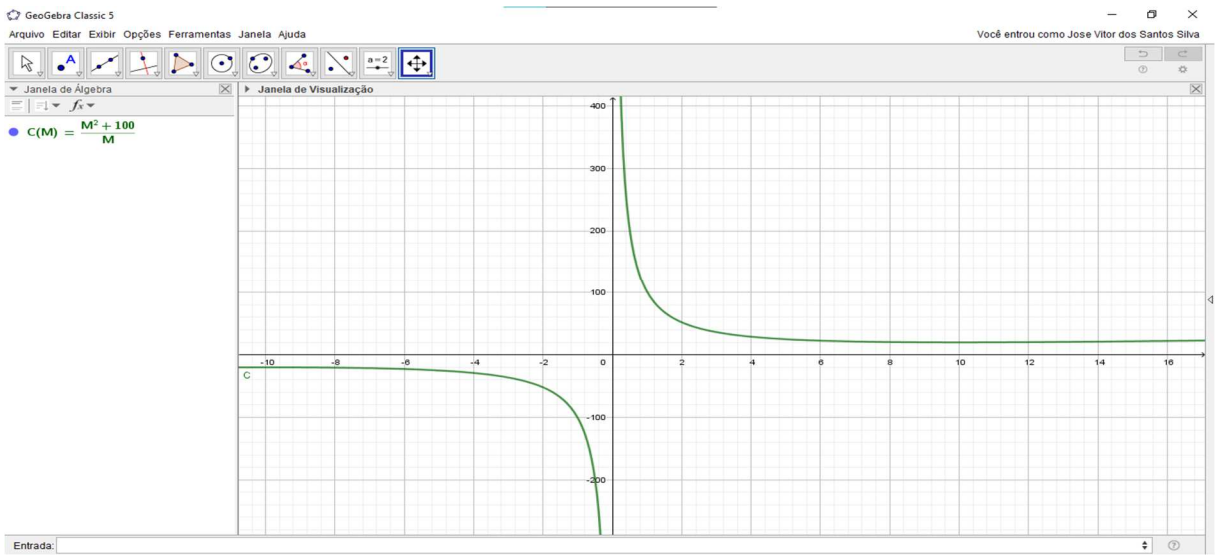


Fonte: Própria

O exemplo 2 trata-se se um problema de minimização, portanto deve-se ser encontrado o ponto de mínimo da função: $C = \frac{M^2+100}{M}$.

Inicialmente, fazemos a representação geométrica da função

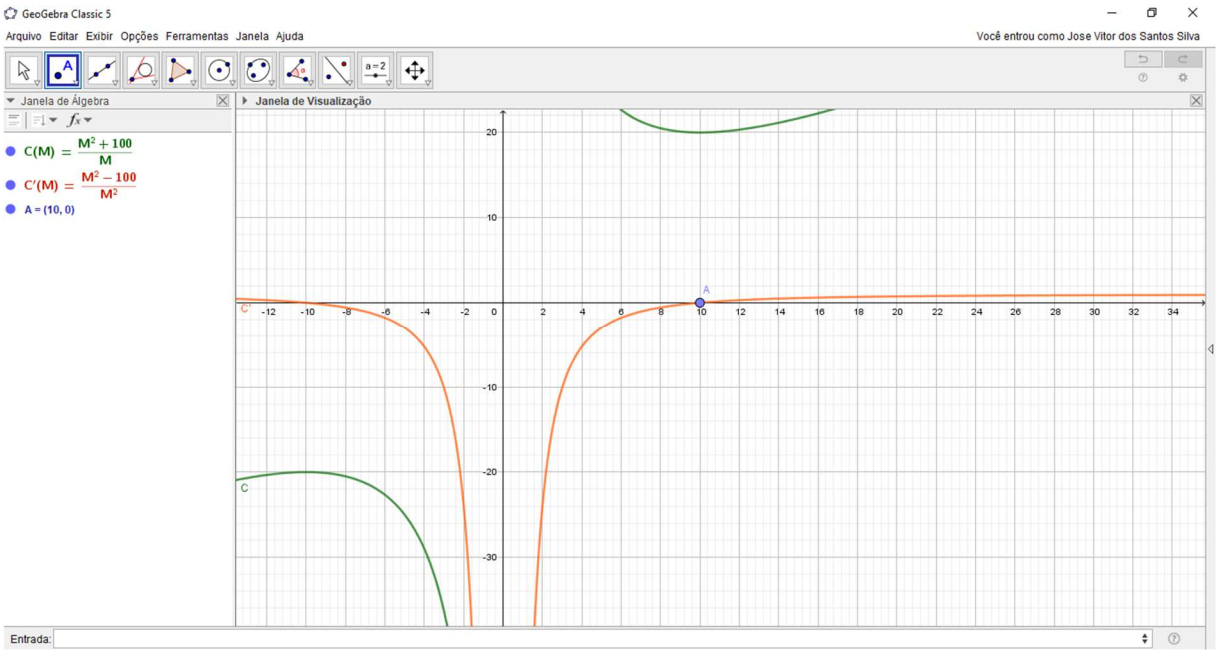
Figura 31 - Gráfico da função $\mathrm{C(M)}$.



Fonte: Própria

Após a representação da função $C(M) = \frac{M^2+100}{M}$, devemos fazer a representação da derivada primeira da função $C(M) = \frac{M^2+100}{M}$

Figura 32 - Gráfico da primeira derivada de $C(M)$



Fonte: Própria

O ponto A representa o ponto de mínimo da função, portanto é o ponto onde a função tem o seu menor valor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho abordou-se uma proposta de ensino de derivadas com a utilização do *software* Geogebra, obtendo resultados de valor cientifico, que possibilitarão um aprendizado diferente do tradicional, despertando no aluno à beleza da matemática, beleza essa que através da interpretação geométrica de alguns conceitos, dão significados a conceitos que antes pareciam coisas de outro mundo.

Ao passo em que se desenvolveu a elaboração deste trabalho, foi feita uma revisão bibliográfica do contexto histórico das derivadas, técnicas de derivação, seguidos de um aprofundamento acerca da representação geométrica das derivadas, com o auxílio do *software* Geogebra, por fim a resolução de aplicações cotidianas das derivadas.

O objetivo principal deste referido trabalho, foi a produção de um manual de utilização do *software* Geogebra, destacando suas principais ferramentas, funcionabilidades, além da apresentação de uma proposta de uso do Geogebra para o ensino de um conceito que em geral é visto como muita dificuldade pelos alunos, a derivada.

Ao finalizar este trabalho, notou-se que a utilização do *software* para o ensino do referido conceito, facilita a visualização gráfica, possibilita simulações e permite aos alunos a visualização de conceitos que sem o auxílio de um recurso computacional não seriam possíveis, além de modelar situações e fazer simulações.

Por conseguinte, este trabalho contribuiu de forma significativa para a minha formação acadêmica e para o desenvolvimento do conhecimento, visto que o aprofundamento deste tema, permitiu a elaboração de metodologias e sequências didáticas para o ensino do referido conceito, além de ter-me permitido desenvolver e aperfeiçoar competências.

REFERÊNCIAS

AFONSO, Amintas Paiva. **Matematiquês:** Matemática é fácil. Disponível em < http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=31/>. Acesso: 12 de agosto de 2021.

ALMEIDA, M. C.; VISEU, F. **Interpretação Gráfica das Derivadas de uma Função por Professores Estagiários de Matemática**. Revista Portuguesa de Educação, ano 15, n. 1, 2002, p.193-219. Disponível em: <http://hdl.handle.net/1822/493>. Acesso em: 05 de outubro de 2021.

AMORIM, F. V.; SOUSA, G. C; SALAZAR, J. V. **Experiência de Atividade Sobre Derivada Utilizando o Software Geogebra**. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, XIII, Recife, Anais... Recife: EDUMATEC, p. 1-12, 2011.

ARAÚJO, L. C. L. de; NÓBRIGA, J. C. C. **Aprendendo Matemática Com o Geogebra**. São Paulo: Exato, 2010.

AYRES JR., F. A. **Cálculo Diferencial e Integral.** 3. ed. São Paulo: Makron, 1994.

BARON, M. E.; BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática:** origens e desenvolvimento do cálculo. [S.l.]: UnB., 1985.

BRANDT, S. T. J.; MONTORFANO, C. **O software GeoGebra como alternativa no ensino da geometria em um mini curso para professores**. (2008). Disponível em: < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/329-4.pdf>. Acesso: 10 de outubro de 2021.

CÁLCULO INFINITESIMAL. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2022. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=C%C3%A1lculo_infinitesimal&oldid=63049562>. Acesso: 08 de julho de 2021.

CARDOSO, Dienifer Tainara. **Resolução de problemas e o software GeoGebra no ensino e aprendizagem de Otimização**. Dissertação (Mestrado). Universidade do Estado de Santa Catarina. 2018. 2018, 155 f.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limite, derivação e integração. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

FULINI, M. **História Do Cálculo Diferencial e Integral**. 2017.

GUIDORIZZI, Hamilton. **Um curso de Cálculo**. Volume 1. 5. ed. São Paulo: LTC, 1995.

HOHENWARTER, Judith. **O GeoGebra como Ferramenta para Ensinar e Aprender**; Disponível em <http://www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf> Acesso: 12 de outubro de 2021.

MACHADO, R. M. **A visualização na resolução de problemas de Cálculo Diferencial e Integral no ambiente computacional MPP**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas: Campinas, 2008.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Volume 1, 3. ed. São Paulo: Harbra, 2002.

PETLA, R. J.; ROLKOUSKI, E. **Geogebra Possibilidades Para O Ensino De Matemática.** União da Vitória, PR, p. 1419–6, 2008.

SILVA, J. I. G.; FERREIRA, D. H. L. **O Uso de Tecnologias na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I**. Anais do XIV Encontro de Iniciação Científica da PUC, Campinas. 29 e 30 de setembro de 2009.

STEWART, James. **Cálculo**: volume 2. 8ª ed. SÃO PAULO: Cengage Learning, 2016.