MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE RONDÔNIA CAMPUS CACOAL LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALINE DA SILVA CORRÊA VALÉRIO SAKYRABIAR

CIRCUITOS ELÉTRICOS: LIGAÇÃO ENTRE EQUAÇÃO DIFERENCIAL E A FÍSICA

CACOAL

2024

ALINE DA SILVA CORRÊA VALÉRIO SAKYRABIAR

CIRCUITOS ELÉTRICOS: LIGAÇÃO ENTRE EQUAÇÃO DIFERENCIAL E A FÍSICA

Artigo apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia, como requisito para a obtenção do título de graduado em Licenciatura em Matemática

Nome do Orientador: Prof. Claudemir Miranda Barboza

CACOAL

2024

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Gerador de Ficha Catalográfica do IFRO, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

Sakyrabiar, Aline da Silva Corrêa Valério.
Circuitos elétricos: Ligação entre equação diferencial e a fisica / Aline da Silva Corrêa Valério Sakyrabiar, Cacoal-RO, 2024.
34 f. : il.

Orientador(a): Prof. Me. Claudemir Miranda Barboza.
Coorientador(a): Prof. Dr. Juliano Alves de Deus.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia - IFRO, Cacoal-RO, 2024.

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Resistores e indutores. 3. Resistores e capacitores. 4. Indutores e capacitores. 5. Resistores, indutores e capacitores. I. Barboza, Claudemir Miranda (orient.). II. Deus, Juliano Alves de (coorient.). III. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia - IFRO. IV. Título.

Bibliotecário(a) Responsável: Fernanda de Oliveira Freitas Cavalcante, CRB-11/762 (Campus Cacoal)

CIRCUITOS ELÉTRICOS: LIGAÇÃO ENTRE EQUAÇÃO DIFERENCIAL E A FÍSICA

Aline da Silva Corrêa Valério Sakyrabiar

Claudemir Miranda Barboza

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo principal aprofundar a compreensão das relações intrínsecas entre os cálculos das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e os princípios fundamentais da física no contexto dos circuitos elétricos. Iniciando com uma análise introdutória, estão sendo detalhadamente apresentados os componentes fundamentais de um circuito elétrico, tais como resistores, indutores, capacitores, fontes de tensão, fontes de corrente e interruptores, juntamente com uma exploração minuciosa de suas características e funcionamentos específicos. A pesquisa segue com uma análise detalhada das equações diferenciais, incluindo suas classificações em relação ao tipo, à ordem e à linearidade. Esse aprofundamento teórico serve como alicerce essencial para a compreensão completa da interseção entre a matemática e a física no contexto dos circuitos elétricos. Para consolidar o conhecimento adquirido, são demonstradas aplicações práticas das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) em problemas envolvendo circuitos elétricos. Isso abrange cenários complexos, como circuitos com resistores e indutores (RL), circuitos com resistores e capacitores (RC), circuitos envolvendo capacitores e indutores (CL) e circuitos que incorporam resistores, indutores e capacitores (RLC), além de representações gráficas utilizando a plataforma geogebra. Antecipamos que este estudo contribuirá substancialmente para a compreensão da conexão entre a matemática das EDOs e os princípios físicos subjacentes aos circuitos elétricos, enriquecendo, assim, o conhecimento nas áreas de matemática aplicada.

PALAVRAS CHAVES: EDO. RL. RC. LC. RLC.

ABSTRACT

The present work aims primarily to deepen the understanding of the intricate relationships between the calculations of Ordinary Differential Equations (ODE) and the fundamental principles of physics in the context of electrical circuits. Starting with an introductory analysis, the fundamental components of an electrical circuit are being presented in detail, such as resistors, inductors, capacitors, voltage sources, current sources, and switches, along with a thorough exploration of their specific characteristics and functions.The research continues with a detailed analysis of differential equations, including their classifications in terms of type, order, and linearity. This theoretical deepening serves as an essential foundation for a complete understanding of the intersection between mathematics and physics in the context of electrical circuits.To consolidate the acquired knowledge, practical applications of Ordinary Differential Equations (ODE) are demonstrated in problems involving electrical circuits. This encompasses complex scenarios, such as circuits with resistors and inductors (RL), circuits with resistors and capacitors (RC), circuits involving capacitors and inductors (CL), and circuits incorporating resistors, inductors, and capacitors (RLC), In addition to graphical representations using the GeoGebra platform. We anticipate that this study will substantially contribute to the understanding of the connection between the mathematics of ODEs and the underlying physical principles of electrical circuits, thereby enriching knowledge in the field of applied mathematics.

KEYWORDS: EDO. RL. CR. LC. RLC.

1. INTRODUÇÃO

As Equações Diferenciais Ordinárias são ferramentas poderosas para estudar e compreender os processos dinâmicos que ocorrem na natureza e na sociedade. Elas permitem expressar de forma concisa e elegante as leis que regem os fenômenos físicos, químicos, biológicos, econômicos e outros. Além disso, elas fornecem métodos para encontrar soluções analíticas ou numéricas dessas leis, bem como analisar suas propriedades e comportamentos. Assim, as Equações Diferenciais Ordinárias são fundamentais para o desenvolvimento da Matemática e de suas aplicações nas diversas áreas do conhecimento.

As EDOs permitem descrever e analisar fenômenos reais de vários campos. Suas aplicações também abrangem a economia. Elas permitem construir modelos matemáticos que representam situações reais de diversas áreas do conhecimento, como física, química, biologia e economia. As equações diferenciais ordinárias (EDOs) são ferramentas poderosas para descrever e analisar fenômenos dinâmicos que envolvem mudanças de variáveis em função do tempo. Por meio desses modelos, podemos compreender melhor os mecanismos que regem os processos naturais e sociais, e também prever e controlar seus comportamentos.

Este trabalho apresenta as aplicações das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) na área de Circuitos Elétricos, com foco específico nos circuitos resistor-indutor (RL), resistor-capacitor (RC), indutor-capacitor (LC) e resistor-indutor-capacitor (RLC). O objetivo primordial é demonstrar como essas equações podem ser empregadas para modelar e analisar o comportamento desses circuitos elétricos. Além disso, este trabalho procura ressaltar a importância das EDOs na resolução de problemas reais envolvendo fenômenos elétricos.

O desenvolvimento e a exploração desse tema são fundamentais para a formação de profissionais qualificados na área da Educação Matemática. Nesse contexto, este estudo buscou aplicar os conhecimentos de Equações Diferenciais Ordinárias na análise de circuitos elétricos que incluem resistores, indutores e capacitores. Para alcançar esse objetivo, combinamos conceitos de circuitos e leis da física com a linguagem matemática para modelar os circuitos elétricos RL, RC e RLC e, em seguida, resolver as EDOs correspondentes.

Os circuitos elétricos RL, RC e RLC representam exemplos de sistemas dinâmicos cujo comportamento varia com o tempo, dependendo das condições iniciais e dos parâmetros envolvidos. Através da resolução das EDOs associadas a esses circuitos, foi possível determinar as correntes e tensões nos elementos dos circuitos em função do tempo, permitindo a análise de fenômenos como carga e descarga de capacitores e indutores. Por fim, apresentaremos exemplos práticos de circuitos elétricos que podem ser modelados por meio de EDOs, incluindo o circuito RLC, RC e RL

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Equação Diferencial

A aplicação das equações diferenciais pode ocorrer em diversas áreas como: na medicina, na engenharia, na química, na física, na biologia e em outras áreas do conhecimento. O cálculo de uma equação diferencial é utilizado para projetar pontes, automóveis, aviões e circuitos elétricos, etc. E neste trabalho pretende-se destacar as aplicações da equação diferencial na área da física, mais precisamente nos circuitos elétricos.

Nas ciências exatas a equação diferencial é uma ferramenta de extrema utilidade, podendo ser aplicada em diferentes situações problemas. Em matemática, uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função sob a forma das derivadas. A classificação da equação diferencial pode ocorrer quanto ao tipo, quanto à ordem e quanto a sua linearidade.

Classificação quanto ao tipo: As equações diferenciais (ED) possuem dois tipos, equações diferenciais ordinárias (EDO), e as equações diferenciais parciais (EDP). As equações diferenciais ordinárias (EDO) são aquelas que contém uma ou mais derivadas de variáveis dependentes em relação a uma variável independente (Zill e Cullen 2001).

Observe um exemplo de (EDO), onde *t* é a variável independente e **x** é a variável dependente.

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + kx = 0$$

As equações diferenciais parciais (EDP) são aquelas que envolvem as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes (Zill e Cullen, 2001).

Considerando x e y variáveis independentes e u a variável dependente temos a seguinte (EDP): Onde *x* e *y* são as variáveis independentes e *u* a variável dependente.

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = x - y$$

Classificação quanto à ordem: A ordem uma equação diferencial é definida pela derivada de maior ordem, essas ordens podem ser ditas como: de *1ª ordem, 2ª ordem,3ª ordem, ..., nª enésima ordem*.

Exemplo de equação diferencial de primeira ordem: $y' - y = 0$

Exemplo de equação diferencial de segunda ordem: $y'' - y' + y = 0$

Exemplo de equação de diferencial de enésima ordem: $y^n \ldots y'' - y' + y = 0$

Classificação quanto a linearidade: A equação diferencial pode ser linear ou não linear. Ela será linear quando as incógnitas e suas derivadas estiverem de forma linear. “As incógnitas e suas derivadas aparecem em uma soma em que cada parcela é um produto de alguma derivada das incógnitas com uma função que não depende das incógnitas”. (Souza, p. 20, 2019)

Neste exemplo, onde *t* é uma variável independente e *x* é a variável dependente.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Uma (EDO) linear de ordem n é escrita na forma:

$$f(x) = a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y$$

Propriedade: *A função y, que é a variável dependente, e todas as suas derivadas têm grau um. Os coeficientes são funções de apenas uma variável independente x.*

Temos a escrita de uma (EDO) não linear, “devido ao y^3”

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y^3 = 0$$

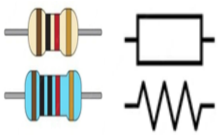
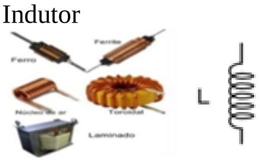
Nesse caso para poder dar sequência ao cálculo, é necessário aplicar o fator integrante, seno ele $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$, onde $p(x)$ é sempre o motivo pela não linearidade da EDO.

2.2 Circuitos elétricos

Um circuito elétrico é uma forma de transmitir energia elétrica para diversos aparelhos e dispositivos. Para que isso aconteça, é preciso que haja uma fonte de tensão, que é o elemento que gera a energia elétrica a partir de outras formas de energia, como a química, a mecânica ou a solar. A corrente elétrica é o fluxo de cargas elétricas que se movem pelos fios condutores ou pelos dispositivos do circuito. As cargas elétricas são partículas muito pequenas que têm propriedades elétricas, como os elétrons. O sentido da corrente elétrica é o oposto do movimento dos elétrons, por convenção.

Cada elemento tem uma função específica no circuito, como converter energia elétrica em energia térmica, armazenar cargas elétricas, criar campos magnéticos, interromper ou permitir a passagem da corrente elétrica, medir a intensidade da corrente elétrica ou a tensão entre dois pontos do circuito.

Tabela 1 : Elementos do circuito elétrico

Elementos/ representação	**Grandeza: Símbolos**	**Função**
Fonte de tensão 	Volt: **V** Tensão elétrica ou diferença de potencial DDP: **V** ou **U**	Criar uma tensão elétrica
Resistor 	Resistência elétrica: **R** Ohm: **Ω**	Criar uma resistência elétrica para a corrente elétrica assim dificulta a passagem das cargas.
Capacitor 	Capacitância: **C** Farand: **F**	Condensar energia elétrico
Indutor 	Indutor: **L** Henry: **H**	Acumular energia através de um campo magnético
Chave 		Conectar e desconectar partes de um circuito

Fusível 	Amper: **A** Corrente elétrica nominal	Resguardar os aparelhos elétricos

Fonte:https://br.freepik.com/vetores-premium/vetor-e-ilustracao-do-resistor-com-simbolo-componente-eletronico-ciencia-do-ensino-de-fisica_36952215.htme . E autores.

No circuito elétrico também existe resistência elétrica de um corpo é a medida da sua oposição à passagem da corrente elétrica**.** Ela depende de alguns fatores que estão relacionados com as propriedades físicas do material que compõem o corpo e com a sua geometria. Os principais fatores que influenciam a resistência elétrica de um corpo são:

A *resistividade:* é uma característica intrínseca de cada material que indica o grau de dificuldade que os elétrons livres encontram para se deslocar no interior do material. Quanto maior for a resistividade, maior será a resistência elétrica. A resistividade depende da estrutura atômica do material e da temperatura em que ele se encontra.

O *comprimento*: é a distância que a corrente elétrica percorre no interior do corpo. Quanto maior for o comprimento, maior será a resistência elétrica, pois haverá mais colisões entre os elétrons livres e os átomos do material.

A *área transversal*: é a seção reta do corpo por onde passa a corrente elétrica. Quanto maior for a área transversal, menor será a resistência elétrica, pois haverá mais espaço para os elétrons livres se deslocarem.

Na resistência a 1° Lei de Ohm é um componente que converte a energia elétrica em energia térmica, reduzindo a tensão e a corrente no circuito. A primeira lei de Ohm estabelece que a tensão aplicada a uma resistência é proporcional à corrente que a atravessa, sendo a constante de proporcionalidade a resistência elétrica da componente tensão (V), a corrente (I) e a resistência (R) dada pela fórmula: V = RI. "Um dispositivo obedece à lei de Ohm se a resistência do dispositivo não depende do valor absoluto nem da polaridade da diferença de potencial aplicada" (Halliday e Resnick, p.143).

$$V = R.I \quad \rightarrow R = V.I \quad \rightarrow I = V.R$$

Grandezas:*(V) Voltagem elétrica medida em Volts; (I) Corrente elétrica - medida em Amperes; (R) Resistência elétrica medida em ohms (Ω)*

A 2° Lei de Ohm, tem relação entre essas grandezas e a resistência elétrica é dada pela segunda lei de Ohm, teoricamente a resistência elétrica é diretamente proporcional ao comprimento (l) do condutor e inversamente proporcional a área de seção transversal desse condutor e pode ser expressa pela fórmula:

$$\boldsymbol{R = \rho.\frac{l}{A}}$$

Onde:

R é a resistência elétrica;

ρ é a resistividade do material;

l é o comprimento do condutor e;

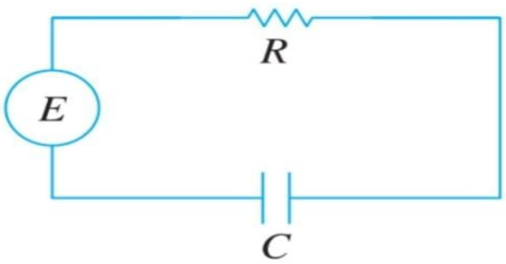
A é a área de secção transversal do corpo.

Os circuitos elétricos mais simples são aqueles que possuem apenas um caminho para a corrente elétrica percorrer. Um exemplo de circuito simples é o formado por uma pilha, uma lâmpada e uma chave. Nestes circuitos, o resistor é representado por sua resistência R, o capacitor, por sua capacitância C, e o indutor, por sua indutância L. Cada uma dessas grandezas têm uma relação com a carga q ou corrente i que atravessa o elemento e com a diferença de potencial V a que ele está submetido, como mostram as equações:

$Resistor: \; V = RI \; Capacitor: C = \frac{Q}{V} \; Indutor: V = L.\frac{di}{dt}.$

Esses circuitos são chamados de RC e RL em série porque os elementos estão ligados um após o outro, formando um único ramo. A análise desses circuitos envolve o estudo do regime transiente e do regime permanente, que dependem das condições iniciais e finais do circuito. Um circuito RC em série é um tipo de circuito elétrico que consiste em um resistor R e um capacitor C conectados em sequência. A função básica de um capacitor é armazenar energia elétrica em um campo elétrico, até atingir uma tensão máxima que depende da sua capacitância e da fonte de alimentação. Já a função principal de um resistor é limitar a corrente elétrica que passa pelo circuito, dissipando parte da energia em forma de calor. Essa energia pode ser aproveitada para realizar algum trabalho útil, como acender uma lâmpada ou aquecer um ambiente.

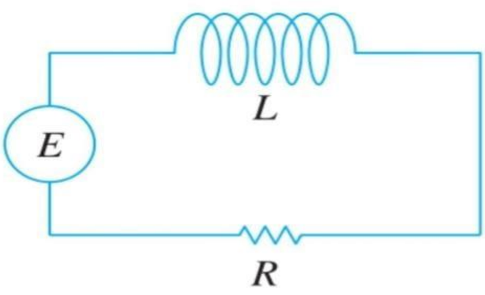
Figura 1: Circuito RC.



Fonte: https://lusoacademia.org/2016/02/23/aplicacao-das-equacoes-diferenciais-em-circuitos-eletricos/

Um circuito RL é um tipo de circuito elétrico que envolve um resistor e um indutor. Esses componentes podem estar conectados em série ou em paralelo, dependendo da configuração desejada. Um circuito RL em série tem uma fonte de tensão E, um resistor R e um indutor L ligados um após o outro. A corrente i(t) que flui pelo circuito varia com o tempo de acordo com a lei de Kirchhoff. Um circuito RL em paralelo tem uma fonte de corrente I, um resistor R e um indutor L ligados aos mesmos dois pontos. A tensão v(t) que cai sobre o circuito varia com o tempo de acordo com a lei de Ohm.

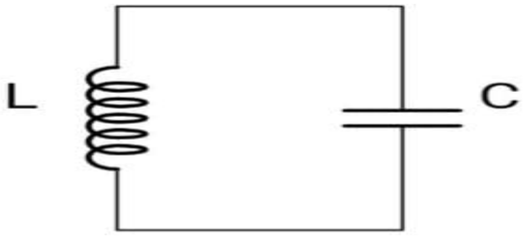
Figura 2: Circuito RL.



Fonte: https://lusoacademia.org/2016/02/23/aplicacao-das-equacoes-diferenciais-em-circuitos-eletricos/

Um circuito ressonante é um circuito que consiste em um indutor e um capacitor, podendo esses dispositivos estarem ligados em série ou em paralelo, podendo ser alimentado por uma fonte de tensão. Um indutor é um componente elétrico que se opõe às variações bruscas de corrente, enquanto um capacitor é um componente elétrico que se opõe às variações bruscas de tensão. Quando um circuito ressonante é alimentado por uma fonte de tensão alternada, a corrente e a tensão oscilam em uma frequência chamada frequência de ressonância, que depende dos valores da indutância e da capacitância do circuito.

Figura 3: Circuito LC.

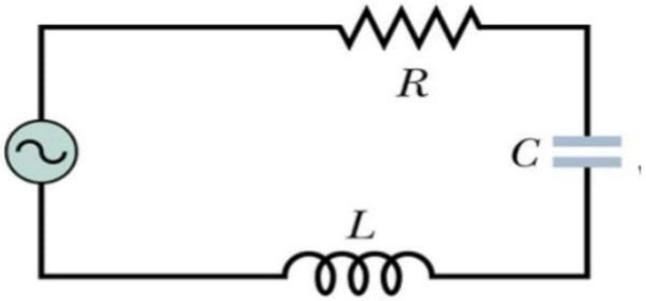


Fonte: https://pt.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/ee-natural-and-forced-response/a/ee-lc-natural-response

Um circuito elétrico é formado por componentes que permitem a passagem de corrente elétrica. Os principais componentes são o resistor, indutor e capacitor, que podem ter diferentes funções e comportamentos no circuito. O resistor é um componente que oferece resistência à passagem de corrente, dissipando energia em forma de calor. O indutor é um componente que armazena energia em forma de campo magnético, criando uma força contra eletromotriz que se opõe à variação da corrente. O capacitor é um componente que armazena energia em forma de campo elétrico, criando uma diferença de potencial entre suas placas que se opõe à variação da tensão.

Esses componentes podem estar ligados em série ou em paralelo, dependendo da forma como são conectados aos terminais da fonte de tensão. Quando estão em série, eles compartilham a mesma corrente, mas têm tensões diferentes. Quando estão em paralelo, eles compartilham a mesma tensão, mas têm correntes diferentes. A forma como os componentes são ligados afeta as propriedades do circuito, como a impedância, a frequência de ressonância e a resposta a sinais alternados ou contínuos.

Figura 4: Circuito RLC



. Fonte: https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/index.php/Arquivo:CircRLC001.png

Os Circuitos RC, RL,LC e RLC podem estar em série ou em paralelo. Uma forma de analisar circuitos elétricos é identificar os elementos que estão em série ou em paralelo. Quando dois elementos estão em série, eles compartilham um único nó e não há outros caminhos para a corrente fluir entre eles. Isso significa que a corrente é igual em todos os elementos em série. No entanto, isso não implica que dois elementos com a mesma corrente estejam necessariamente em série. Eles podem estar conectados a outros elementos que formam ramos diferentes. Por outro lado, quando dois elementos estão em paralelo, eles estão conectados aos mesmos dois nós e formam ramos distintos. Isso significa que a tensão é igual em todos os elementos em paralelo. No entanto, isso não implica que dois elementos com a mesma tensão estejam necessariamente em paralelo. Eles podem estar conectados a outros elementos que formam malhas diferentes.

A lei de Kirchhoff para as tensões em qualquer circuito fechado, a soma algébrica das tensões é igual a zero. Isso significa que a energia elétrica fornecida pelas fontes é igual à energia elétrica consumida pelos resistores e outros componentes do circuito. Essa lei permite calcular as correntes e as tensões em cada ramo de um circuito complexo. Em um circuito em série contendo apenas um resistor e um indutor, a segunda lei de Kirchhoff diz que a soma da caída de tensão no indutor ($L(di/dt)$) e da caída de tensão no resistor (iR) será igual à voltagem $E(t)$ no circuito elétrico. Podemos obter a seguinte equação diferencial linear para a corrente $i(t)$:
$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$

Onde L e R são constantes conhecidas como a indutância e a resistência, respectivamente.

A corrente é na maioria das vezes chamada de resposta do sistema. Uma forma de analisar o comportamento de um circuito RLC série é aplicar a lei das tensões de Kirchhoff, que afirma que a soma algébrica das tensões em um laço fechado é zero. Assim, temos que:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + +\frac{q}{C} = E$$

3. METODOLOGIA

O estudo seguiu uma abordagem qualitativa, considerando uma existência de relação entre a física e a equação diferencial.

> A abordagem quantitativa caracteriza-se pela formulação de hipóteses, definições operacionais das variáveis, quantificação das modalidades de coleta de dados e informações, utilização de tratamentos estatísticos (Gressler, 2004, p. 42).

Nesse intuito, inicialmente o procedimento adotado na pesquisa para obtenção de dados foi a pesquisa bibliográfica, fazendo levantamentos de referencial teórico e sendo um trabalho contínuo durante todo o desenvolvimento da pesquisa. (Fonseca, 2002, p. 32). A pesquisa contou com amparo de sites como, o Scribd, o Google Acadêmico, o Scielo, e os materiais selecionados foram artigos, teses, monografias e livros.

> A pesquisa bibliográfica é feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos e páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem, porém, pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta (Fonseca, 2002, p. 32).

O corpus da pesquisa foi constituído através da pesquisa documental, ao buscar problemas envolvendo circuitos elétricos e equações diferenciais ordinárias (EDO). O trabalho realizará aplicações de cálculo de equações diferenciais ordinárias em circuitos elétricos como, circuito resistor-indutor (RL), circuito resistor-capacitor (RC), circuito indutor-capacitor (LC) e circuito resistor-indutor-capacitor (RLC).

> A pesquisa documental trilha os mesmos caminhos da pesquisa bibliográfica, não sendo fácil por vezes distingui-las. A pesquisa bibliográfica utiliza fontes constituídas por material já elaborado, constituído basicamente por livros e artigos científicos localizados em bibliotecas. A pesquisa documental recorre a fontes mais diversificadas e dispersas, sem tratamento analítico, tais como: tabelas estatísticas, jornais, revistas, relatórios, documentos oficiais, cartas, filmes, fotografias, pinturas, tapeçarias, relatórios de empresas, vídeos de programas de televisão, etc. (Fonseca, 2002, p. 32).

Para uma melhor compreensão dos resultados dos cálculos, foi utilizado a plataforma geogebra para uma representação gráfica das funções. E para conseguir alcançar o objetivo, a metodologia incluiu identificar as variáveis do problema; compreender/aplicar conceitos de física em problemas de circuitos elétricos; usar uma linguagem matemática por meio da EDO para conseguir desenvolvê-los e determinar a solução particular. O resultado das questões é puramente matemático e com isso visa promover avanços nas áreas das ciências exatas e aplicadas, partindo de conceitos físicos e matemáticos dos problemas.

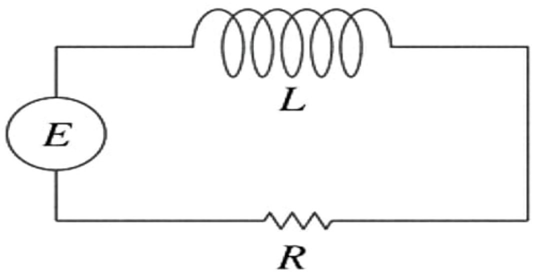
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção será apresentado aplicações de equações diferenciais ordinárias EDO, em algumas situações problemas envolvendo os circuitos elétricos RC, RL, LC e RLC.

- **Aplicação da EDO em problema envolvendo o circuito RL**

Em um circuito em série contendo somente um resistor e um indutor, a segunda lei de Kirchhoff diz que a soma da queda de tensão no indutor $L\frac{di}{dt}$ e da queda de tensão no resistor $R.i$ é igual à voltagem $E(t)$ no circuito, ou seja, em que L e R são constantes conhecidas como a indutância e a resistência, respectivamente.

Figura 5: Circuito elétrico RL em série.



Fonte: https://images.app.goo.gl/eEWwss98zjnNkJTt5

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

Problema 01: Suponha que um circuito elétrico tenha um gerador fornecendo 150 $volts$ e um resistor de 15 $ohms$ e um indutor de 5 $henrys$ ligados em série. Além disso, suponha que o interruptor seja acionado quando $t = 0$; isto é $i = 0$ quanto $t = 0$.

a) Expresse i como função de t;

b) Ache a corrente teoricamente máxima.

Resolução da letra a)

Dados: $\{R = 15\ volts\ E\ (t) = 150\ L = 5\ henrys\ ohms$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

Substituindo os dados na fórmula $5\frac{di}{dt} + 15i = 150$

Agora dividiremos tudo por 5: $\frac{5}{5}\frac{di}{dt} + \frac{15i}{5} = \frac{150}{5} \to \frac{di}{dt} + 3i = 30$

Uma Pausa no cálculo para determinarmos o fator integrante: $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$, sendo $p(t)$=3

$$\mu = e^{\int 3dt} \to \mu = e^{3t}$$

Agora que descobrimos os fatores integrantes vamos multiplicar toda a nossa equação anterior $\frac{di}{dt} + 3i = 30$, por $\mu = e^{3t}$

$$e^{3t}.\frac{di}{dt} + e^{3t}.3i = e^{3t}.30 \to \frac{d}{dt}[e^{3t}.i] = 30.e^{3t} \to d[e^{3t}.i] = 30.e^{3t}dt \to \int d[e^{3t}.i] = \int 30.e^{3t}dt \to$$

$$\int d[e^{3t}.i] = 30\int e^{3t}dt \to e^{3t}.i = 30.\frac{1}{3}.e^{3t} + C \to i = e^{-3t}.30.\frac{1}{3}.e^{3t} + e^{-3t}.C \to i = e^{-3t}.10.e^{3t} + e^{-3t}.C$$

$$\to i = e^{0}.10 + e^{-3t}.C \to$$

Logo $i = 1.10 + e^{-3t}.C \to i = 10 + e^{-3t}C$ foi expresso como função de t.

Resolução da letra b)

Inicial observe que: $i = 10 + e^{-3t}C$ $\to$ isso tende a zero

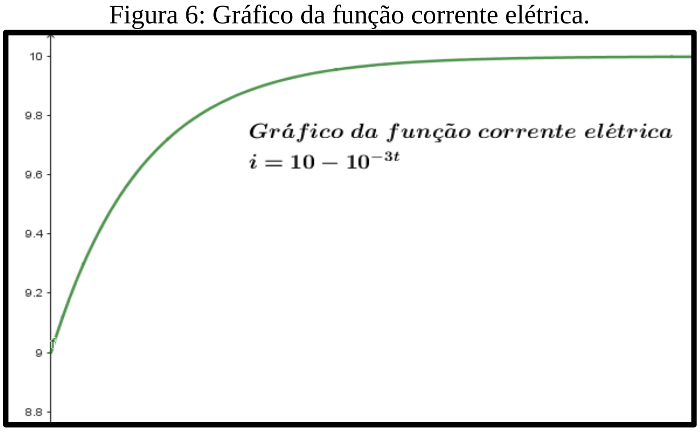
Logo: $i = 10$

$$i = 0, quando\ t = 0$$

$$i = 10 + e^{-3t}C \to 0 = 10 + e^{-3.0}C \to 0 = 10 + e^{0}C \to -10 = 1.C \to C = -10$$

Portanto: $\to i = 10 - 10e^{-3t}$, essa corrente elétrica teórica é uma grandeza que tem a sua maior corrente quando o tempo a partir do tempo de aproximadamente oito décimos de unidade de medida e o menor valor é quando o tempo é zero, possuindo uma carga de 9 amperes, conforme figura abaixo.

Figura 6: Gráfico da função corrente elétrica.



Fonte: Os autores

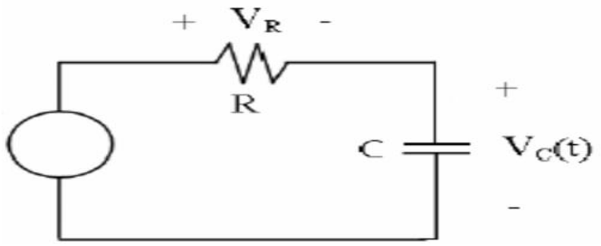
- **Aplicação da EDO em problema envolvendo o circuito RC**

Inicialmente, vale ressaltar que a corrente é a taxa de variação da carga em relação ao tempo, como foi apresentado na seção anterior, ou seja: $I(t) = Q'(t)$.

Pela 2ª Lei de Kirchhoff, a tensão da fonte é soma das tensões sobre os componentes, o que implica que:

$V = V_R + V_C$.

Figura 7: Circuito elétrico RLC em série.



Fonte: https://images.app.goo.gl/3BzZTeoDZ3mU65yV9

Problema 02: Determine a função do circuito RC em série, onde $R = 8\Omega$, $V = 24V$ e $C = 2F$. Considere que a carga no tempo $t = 0$ é dada por $Q_0 = 0$

Resolução

Dados: $\{V = 24V \; V_R = iR \; \rightarrow \; iR = 8Q' \; V_C = \frac{Q}{C} \; C = 2F$

$$V = V_R + V_C \rightarrow 24 = iR + \frac{Q}{C} \rightarrow 24 = 8Q' + \frac{Q}{2} \rightarrow Q' + \frac{Q}{16} = 3$$

Calcular o fator integrante:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}, \text{ sendo } p(t) = \frac{1}{16} \rightarrow \mu(t) = e^{\int (\frac{1}{16})\, dt} \rightarrow \mu(t) = e^{\frac{1}{16}t}$$

Agora vamos multiplicar toda a equação $Q' + \frac{Q}{16} = 3$ pelo fator integrante

$$e^{\frac{1}{16}t} . Q' + e^{\frac{1}{16}t} . \frac{Q}{16} = e^{\frac{1}{16}t} . 3$$

$$\left[e^{\frac{1}{16}t} . Q\right]' + e^{\frac{1}{16}t} . \frac{Q}{16} = 3e^{\frac{1}{16}t}$$

$$\left[e^{\frac{1}{16}t} . Q\right]' = 3e^{\frac{1}{16}t}$$

$$\int \left[e^{\left(\frac{1}{16}\right)t} . Q\right] = 3\int \left(e^{\frac{1}{16}t}\right)$$

Vamos calcular aperte a $\int e^{\frac{t}{16}}\, dt$

Chamaremos: $\{u = \frac{1}{16} \; du = \frac{1}{16} dt\}$

$$\int e^{\frac{t}{16}}\, dt \rightarrow 16\int e^u\, du \rightarrow 16. e^u + K \rightarrow 16. e^{\frac{1}{16}} + K$$

Agora resolvendo as integrais, teremos que: $\int \left[e^{\left(\frac{1}{16}\right)t} . Q\right] = 3\int \left(e^{\frac{1}{16}t}\right)$

$$e^{\left(\frac{1}{16}\right)t} . Q = 3.16. e^{\frac{1}{16}} C \rightarrow e^{\left(\frac{1}{16}\right)t} . Q = 48\, e^{\frac{1}{16}} C \rightarrow Q = \frac{48\, e^{\frac{1}{16}} C}{e^{\left(\frac{1}{16}\right)t}} \rightarrow Q = 48 + C. e^{\left(-\frac{1}{16}\right)t}$$

Considerando $t = 0$ e $Q = 0$

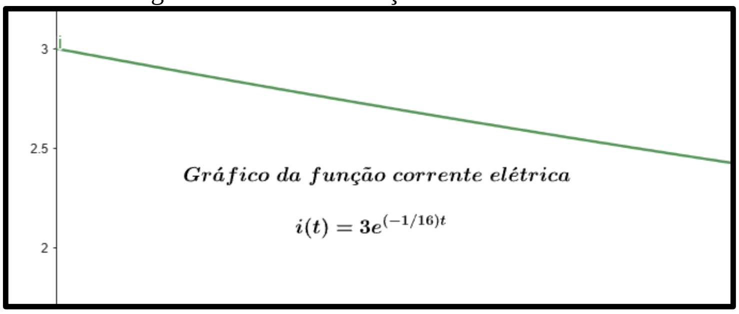
$$0 = 48 + C. e^{\left(-\frac{1}{16}\right)0} \rightarrow 0 = 48 + C. e^0 \rightarrow C = -48$$

Substituindo $C = -48$, na equação $Q = 48 + C. e^{\left(-\frac{1}{16}\right)t}$, teremos que $Q(t) = 48 - 48. e^{\left(-\frac{1}{16}\right)t}$

Derivando $Q(t) = 48 - 48. e^{\left(-\frac{1}{16}\right)t}$, obtemos: $I(t) = 3e^{\left(-\frac{1}{16}\right)t}$, com $t \geq 0$

Portanto: $\rightarrow I(t) = 3e^{\left(-\frac{1}{16}\right)t}$ é a função do circuito RC em série, onde $t \geq 0$ conforme mostra a figura abaixo.

Figura 8: Gráfico da função corrente elétrica.



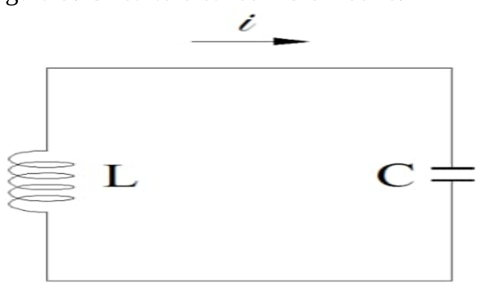
Fonte: Os autores

- **Aplicação da EDO em problema envolvendo o circuito LC**

Um circuito LC é composto por um capacitor e um indutor

$$q(t) = c.v(t) \qquad i = c.\frac{dv}{dt} \Longrightarrow v' = \frac{i}{c}$$

Figura 9: Circuito elétrico LC em série.



Fonte: https://images.app.goo.gl/BeeejYREdqzK9fA3A

Problema 03: Um circuito LC é composto por um capacitor $0{,}1\, mF$ e um indutor de $10mH$. A chave fecha em $t = 0s$ e nesse instante o capacitor possui $10v$ em seus terminais. Calcule uma expressão para a carga em C

Primeiro vamos descobrir a frequência de oscilação desse circuito

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{(10^{-6})}} \rightarrow \omega = \frac{1}{10^{-3}} \rightarrow \omega = 1000\,\frac{rad}{s}$$

Agora vamos escrever uma expressão genérica para tensão desse capacitor

$$V_C(t) = A.sen(\omega t) + B.cos(\omega t)$$

Derivando, temos que: $V_C{}'(t) = A\omega.cos(\omega t) - B\omega.sen(\omega t)$

Vamos terminar as condições iniciais para acharmos o valor de A e B da expressão genérica. Para isso vamos usar: $V_C(0) = 10$ e $V_C{}'(0) = 0$

Substituindo a expressão $V_C{}'(t) = A\omega.cos(\omega t) - B\omega.sen(\omega t)$

pela condição inicial $V_C(0) = 10$ e $V_C{}'(0) = 0$, teremos que:

$$V_C{}'(0) = A\omega.cos(\omega.0) - B\omega.sen(\omega.0)$$

$$V_C{}'(0) = A\omega.cos(0) - B\omega.sen(0)$$

$$0 = A\omega.1 - B\omega.0$$

$$0 = A\omega.1$$

$$A = 0$$

Agora vamos descobrir o valor de B, lembrando que $V_C(0) = 10$ e $A = 0$

$$V_C(t) = A.sen(\omega t) + B.cos(\omega t)$$

$$10 = 0.sen(\omega.0) + B.cos(\omega.0)$$

$$10 = 0.sen(0) + B.cos(0)$$

$$10 = 0.0 + B.1$$

$$B = 10$$

Vamos substituir novamente para achar a expressão de tensão do capacitor

$$V_C(t) = A.sen(\omega t) + B.cos(\omega t)$$

$$V_C(t) = 0.sen(1000t) + 10.cos(1000t)$$

$$V_C(t) = 0 + 10.cos(1000t)$$

$$V_C(t) = 10\ cos(1000t)$$

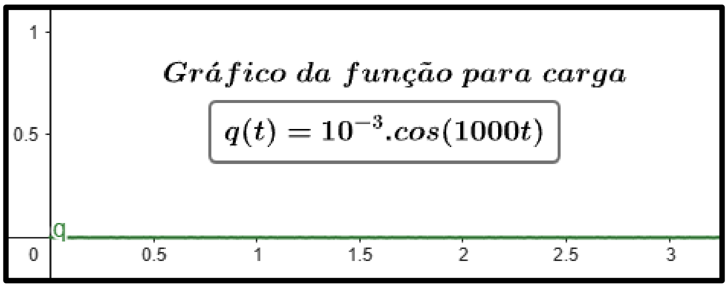
Continuando, o problema nos pede a carga do capacitor e para isso utilizaremos a tensão já encontrada de

$$V_C(t) = 10\ cos(1000t)$$

$$q(t) = c.v(t) \rightarrow q(t) = 0{,}1.10^{-3}.10\ cos(1000t) \rightarrow q(t) = 10^{-3}\ cos(1000t)$$

Portanto a tensão do capacitor é $\rightarrow\ q(t) = 10^{-3}\ cos(1000t)$, conforme mostra a figura abaixo.

Figura 10 : Gráfico da função corrente elétrica.

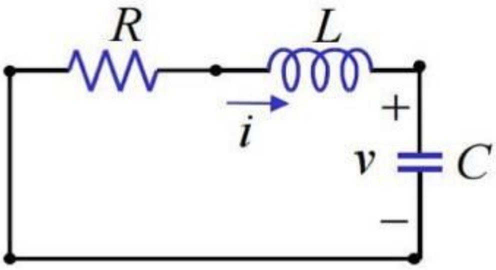


Fonte: Os autores

- **Aplicação da EDO em problema envolvendo o circuito RLC**

Considerando que a tensão que é distribuída ao circuito é dada pela fonte representada por e é uma função em relação ao tempo que normalmente é dada. De acordo com a 2ª Lei de Kirchhoff, a soma das quedas de tensão nos componentes é igual a tensão que entra no circuito.

Figura 11: Circuito elétrico RLC em série.



Fonte: https://images.app.goo.gl/ix9RxdFu75Zkh4h78

$$LI' + RI + \frac{Q}{C} + E(t)$$

Problema 04: Considere um circuito RLC em série, que não possui fonte. Com base nos dados determine a expressão que representa a tensão no capacitor em função do tempo para um tempo $E(t) = 0$. Sabendo que $I_L = 4\ ámperes$ e $V_c(0) = -4\ volts,\ \ R = 6\Omega\,, L = 1H\ e\ C = 40\ mF$

Resolução

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C} = E(t) \to I'' + 6I' + \frac{1}{0{,}04} = 0 \to I'' + 6I' + 25I = 0$$

Observe que temos uma equação linear homogênea de segunda ordem. Com isso, define-se a equação característica: $r^2 + 6r + 25 = 0$.

Cuja as raízes são: $r_1 = -3 + 4i$ e $r_2 = -3 - 4i$

Com isso, a solução geral da equação $I'' + 6I' + \frac{1}{0{,}04} = 0$, fica:

$I(t) \Longrightarrow e^{-3t}[c_1 cos(4t) + c_2\, sen(4t)]$ sendo $t \in [0, +\infty]$ e $E(t) = 0,$

Logo teremos que:

$$e^{-3.0}[c_1 cos(4.0) + c_2\, sen(4.0)] = 4 \to e^0[c_1 cos(0) + c_2\, sen(0)] = 4 \to 1\,[c_1.1 + c_2\,.0] = 4 \to c_1 = 4$$

Utilizando a 2ª Lei de Kirchhoff, tem-se que a soma das tensões nos componentes é igual à tensão que entra no circuito. Assim: $V_R + V_L + V_C = E(t)$

$$R.I(t) + L.I'(t) + V_C(t) = E(t) \to R.I(0) + L.I'(0) + V_C(t) = E(0)$$

Aplicando as condições iniciais: $R = 6\Omega$, $L = 1H,\ I_L = 4\ A$ e $V_c(0) = -4\ V$

$$R.I(0) + L.I'(0) + V_C(0) = E(0) \to 6.4 + 1.I'(0) - 4 = 0 \to 24 + I'(0) - 4 = 0 \to I'(0) = 4 - 24 \to I'(0) = -20$$

Voltando a $I(t) = e^{-3t}[c_1 cos(4t) + c_2\, sen(4t)]$ para derivar

$$I(t) = (-4c_1e^{-3t} - 3c_2e^{-3t})sen(4t) + (-3c_1e^{-3t} + 4c_2e^{-3t})cos(4t)$$

Considerando na equação $t = 0$, termos que:

$$I(0) = (-4c_1e^{-3.0} - 3c_2e^{-3.0})sen(4.0) + (-3c_1e^{-3.0} + 4c_2e^{-3.0})cos(4.0)$$

$$I(0) = (-4c_1.1 - 3c_2.1)sen(0) + (-3c_1.1 + 4c_2.1)cos(0)$$

$$I(0) = (-4c_1 - 3c_2)0 + (-3c_1 + 4c_2)1$$

$$I(0) = (-3c_1 + 4c_2)$$

Se igualarmos $I(0) = (-3c_1 + 4c_2)$com a $I'(0) = -20$, substituindo o valor de $c_1 = 4$

$$-3c_1 + 4c_2 = -20 \to -3.4 + 4c_2 = -20 \to -12 + 4c_2 = -20 \to c_2 = -2$$

Usando os valores de $c_1 = 4$ e $c_2 = -2$, na equação $I(t)e^{-3t}[c_1 cos(4t) + c_2\, sen(4t)]$

$$I(t)e^{-3t}[c_1 cos(4t) + c_2\, sen(4t)] \to I(t)e^{-3t}[4.cos\,(4t) - 2.sen(4t)]$$

Para encontrar a tensão sobre o capacitor, utiliza-se a Lei de Kirchhoff das Tensões

$$LI' + RI + \frac{Q}{C} + E(t) \to LI' + RI + V_C = O \to V_C = -LI' - RI$$

Substituindo os valores de $c_1 = 4$ e $c_2 = -2$ na equação: $I(t) = (-4c_1e^{-3t} - 3c_2e^{-3t})sen(4t) + (-3c_1e^{-3t} + 4c_2e^{-3t})cos(4t)$

$$I'(t) = (-4.4e^{-3t} - 3(-2).e^{-3t})sen(4t) + (-3.4.e^{-3t} + 4(-2).e^{-3t})cos(4t)$$

$$I'(t) = (-16e^{-3t} + 6e^{-3t})sen(4t) + (-12e^{-3t} - 8e^{-3t})cos(4t)$$

$$I'(t) = -10e^{-3t}sen(4t) - 20e^{-3t}cos(4t)$$

Substituir $I(t)e^{-3t}[4.cos\ (4t)\ - 2.sen(4t)]$ e $I'(t) = -10e^{-3t}sen(4t) - 20e^{-3t}cos(4t)$ em $V_C = -LI' - RI$

$$V_C = -[-10e^{-3t}sen(4t) - 20e^{-3t}cos\ (4t)\ ] - 6[e^{-3t}(4.cos\ (4t)\ - 2.sen(4t))]$$

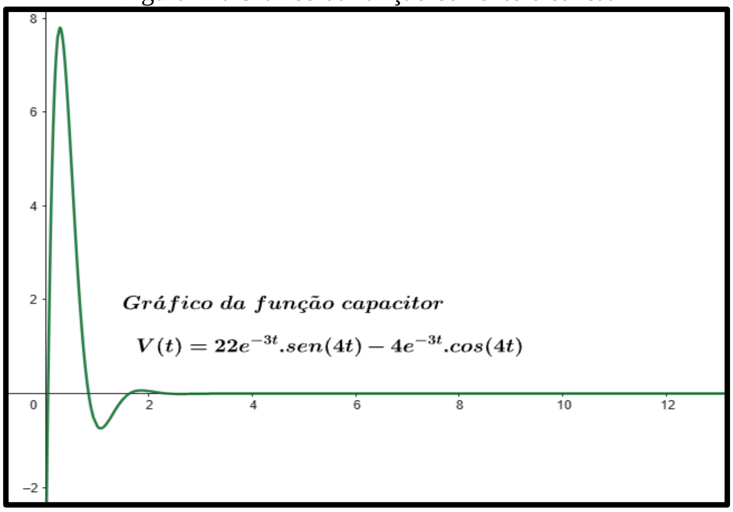
$$V_C = 10e^{-3t}sen(4t) + 20e^{-3t}cos\ (4t)\ - 6e^{-3t}(4.cos\ (4t)\ - 2.sen(4t))]$$

$$V_C = 10e^{-3t}sen(4t) + 20e^{-3t}cos\ (4t)\ - 24e^{-3t}cos\ (4t)\ + 12e^{-3t}.sen(4t))]$$

$$V_C = 22e^{-3t}sen(4t) - 4e^{-3t}cos\ (4t)\text{ , com } t \geq 0$$

Portanto a tensão do capacitor é → $V_C = 22e^{-3t}sen(4t) - 4e^{-3t}cos\ (4t)$, conforme mostra a figura [12].

Figura 12: Gráfico da função corrente elétrica.



Fonte: Os autores

4. CONCLUSÃO

Neste artigo foi apresentado algumas aplicações das equações diferenciais ordinárias nos circuitos elétricos, mostrando como elas podem modelar e descrever o comportamento dos componentes e das correntes. Resolvendo as equações diferenciais ordinárias pode verificar a importância e a utilidade das equações diferenciais ordinárias em diversos contextos e situações do nosso cotidiano.

As equações diferenciais são ferramentas essenciais para analisar o comportamento dos circuitos elétricos. Elas permitem modelar as relações entre as grandezas elétricas, como tensão, corrente e resistência, e resolver problemas que envolvem essas variáveis. Neste trabalho, buscou-se investigar e entender um pouco sobre os circuitos, seus elementos e analisar o comportamento de cada função em alguns exemplos de como as equações diferenciais podem ser aplicadas em circuitos simples e complexos**.** Para isso, utilizou-se os conceitos de equações lineares de primeira ordem, equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes e equações não lineares.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Camila Duarte. **Equações diferenciais aplicadas em circuitos elétricos.** Cornélio Procópio, 2014.

BARBOSA, Mauro José. **Equações Diferenciais Ordinárias: aplicações nos circuitos elétricos**. Cacoal, 04/2021.

CORRÊA, Florence Nazário. **Aplicações de equações diferenciais ordinárias em Circuitos elétricos RL e RLC.** Manaus, março de 2022.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. **Metodologia de pesquisa**. 1° edição, editora UFRGS. Rio Grande do Sul, 2009.

GIL, A. C. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila como elaborar projetos de pesquisa. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

HALLIDAY, David; Resnick, Robert; Walker, Jearl. **Fundamentos de Física:** Eletromagnetismo. 9ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

LIMA, Rayane Gomes. **Estudo sobre equações diferenciais ordinárias com aplicações em circuitos elétricos**. Angicos, 2020.

MACHADO, Kleber Daum. **Teoria do Eletromagnetismo** Volume I. Ed. UEPG, Ponta Grossa, 2004.

SOUZA, Joebson Jefferson da silva. **Aplicação das equações diferenciais ordinárias nos circuitos Elétricos**. Cuité, PB, 2019.