MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE RONDÔNIA

CAMPUS CACOAL

IVANEIDE MAGALI DO NASCIMENTO PEREIRA

TEORIA E PRÁTICA NA LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON.

Cacoal

2019

IVANEIDE MAGALI DO NASCIMENTO PEREIRA

TEORIA E PRÁTICA NA LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON.

Trabalho de conclusão de curso na modalidade monografia apresentado a Coordenação de Curso de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia – IFRO, Campus Cacoal, como requisito para obtenção de aprovação no curso de Licenciatura em Matemática, sob a orientação do Prof. Me. Claudemir Miranda Barboza.

Cacoal

2019

Ficha catalográfica

P436t

Pereira, Ivaneide Magali do Nascimento.
Teoria e prática na lei de resfriamento de Newton. / Ivaneide Magali do Nascimento Pereira. Cacoal, 2019.

44 f. ; 30 cm. il.
Inclui bibliografia

Monografia. Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – IFRO, Campus Cacoal, 2019.

Orientador: Prof. Ms. Claudemir Miranda Barbosa.

1. Equações diferenciais 2. Lei de Resfriamento de Newton. 3.Matemática – ensino. I. Pereira, Ivaneide Magali do Nascimento. II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia – IFRO. III. Título.

CDD 515.35

Bibliotecária responsável: Gizele de Melo Viana – CRB11/914

INSTITUTO FEDERAL
Rondônia
Campus Cacoal

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DEPESP
Departamento de Pesquisa, Inovação e Pós-Graduação

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do(a) discente **IVANEIDE MAGALI DO NASCIMENTO PEREIRA.**

Aos 16 dias do mês de maio do ano de dois mil e dezenove, às 20:50 horas, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia, *campus* Cacoal, reuniu-se a banca examinadora do trabalho apresentado como Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática, intitulado: "**TEORIA E PRÁTICA NA LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON.** Compuseram a banca examinadora os professores **Claudemir Miranda Barboza** (orientador), **Maily Marques Pereira** (avaliador 1), **Irlan Cordeiro de Souza** (avaliador 2). Após a exposição oral, o candidato foi arguido pelos componentes da banca que se reuniram reservadamente, e decidiram, ".....aprovado.................................", com o conceito: ".....9.9....." para o TCC (Artigo Científico), e deverá ser entregue impresso e em CD com as devidas correções indicadas pela banca (caso necessário), no prazo de 30 (trinta) dias úteis a contar da presente data. Para constar, redigi a presente Ata, que aprovada por todos os presentes, vai assinada por mim, *Jorge da Silva Werneck*, Coordenador do Curso de Graduação em Matemática, e pelos demais membros da banca.

Claudemir Miranda Barboza

Prof. Me. Claudemir Miranda Barboza
Orientador

Prof. Me. Maily Marques Pereira
Avaliador 1

Prof. Me. Irlan Cordeiro de Souza
Avaliador 2

Prof. Me. Jorge da Silva Werneck
Coordenador do curso

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por guiar meu caminho e dar força para nunca desistir.

Agradeço à minha avó Dona Eliza Gomes (que hoje está morando com Deus) por ter me criado e conseguido me transformar no que sou hoje, uma pessoa guerreira, independente e agradecida.

Agradeço aos meus familiares, em especial ao meu esposo, que compreenderam minha ausência nos finais de semana, feriados, almoços, viagens, entre outros e que por várias vezes me ajudaram a não desistir.

Agradeço a todos os meus colegas que confiaram a mim suas amizades, dramas, problemas e conhecimentos.

Agradeço aos professores Irlan Cordeiro de Souza, Jorge Werneck e Juliano Alves de Deus pela colaboração, aprendizado e por estarem sempre dispostos a ajudar.

Agradeço a todos os professores que contribuíram no meu aprendizado e formação ao longo desses anos.

Agradeço ao meu orientador Claudemir Miranda Barboza por confiar no meu estudo, por toda a paciência e compromisso dedicado a mim. Por ser um grande exemplo de professor.

"Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer".

Albert Einstein

RESUMO

O estudo das Equações Diferenciais é de fundamental importância nas aplicações e resoluções de problemas em diversas ciências, inclusive nas que envolvem a Lei de Resfriamento de Newton. Este trabalho apresenta uma abordagem teórica de Equações Diferenciais, em particular na Lei de Resfriamento de Newton através da relação entre teoria e prática. Essa união é de fundamental importância no ensino da matemática, pois modifica atitudes, posturas, gera críticas e reflexões na construção do conhecimento dos educandos. No texto é definido inicialmente o conceito, as características, o contexto histórico e as aplicações das Equações Diferenciais. Também ocorre a definição, a história e aplicações da Lei de Resfriamento de Newton, e posteriormente há a aplicação e análise de uma situação-problema envolvendo teoria e prática. O que se espera neste trabalho é estimular o entendimento das Equações Diferenciais, em particular da Lei de Resfriamento de Newton, com a intenção de ser simples e compreensível, a fim de demonstrar como o aprendizado pode se tornar prazeroso quando se consegue unir aplicações teóricas com situações relacionadas ao cotidiano.

Palavras-chave: Equações Diferenciais; Lei de Resfriamento de Newton; Prática; Teoria.

ABSTRACT

The study of Differential Equations is of fundamental importance in the applications and resolutions of problems in several sciences, including those that involve Newton's Law of Cooling. This work presents a theoretical approach of Differential Equations, in particular in Newton's Law of Cooling through the relation between theory and practice. This union is of fundamental importance in the teaching of mathematics, since it modifies attitudes, postures, generates criticisms and reflections in the construction of the knowledge of learners. In the text is defined initially the concept, the characteristics, the historical context and the applications of the Differential Equations. There is also the definition, history and applications of Newton's Law of Cooling, and later there is the application and analysis of a problem situation involving theory and practice. What is expected in this work is to stimulate the understanding of Differential Equations, in particular Newton's Cooling Law, with the intention of being simple and comprehensible, in order to demonstrate how learning can become pleasurable when it is possible to unite theoretical applications with situations related to daily life.

Keywords: Differential Equations; Newton's Cooling Law, Practice; Theory.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais é um instrumento de cálculo muito utilizada na área de exatas, e pode ser vista em nosso cotidiano no resfriamento e aquecimento de corpos, nos lançamentos de objetos, nas velocidades instantâneas, entre outros. Neste trabalho objetivamos o estudo das Equações Diferenciais, em especial da Lei de Resfriamento de Newton através da união entre teoria e prática.

A teoria na Matemática é de suma importância, pois leva ao conhecimento do aluno o que o homem foi capaz de criar e desenvolver, para buscar na ciência resposta para o que acontece ao seu redor. O bom direcionamento nas aulas de matemática induz no aluno curiosidades, em que ele pode indagar as técnicas utilizadas, e observar através da prática a importância dos fundamentos matemáticos no cotidiano das pessoas e no desenvolvimento da sociedade.

Esta monografia vem confirmar que, o ensino da matemática pode ser demonstrado através da união entre fundamentos teóricos e aplicações práticas. Dessa forma, aprender matemática se torna mais prazerosa e quebra paradigma como a "matemática é chata". Isso contextualiza o estudo, determinando uma nova visão, mudando a forma de o aluno interpretar os diversos acontecimentos, formando cidadãos críticos e construtores do conhecimento.

A divisão dos tópicos do trabalho seguiu a seguinte estrutura, de início são definidos o contexto histórico, o conceito, as classificações e aplicações das Equações Diferenciais, logo em seguida, é conceituado a Lei de Resfriamento, assim como suas aplicações e a trajetória de Newton. E por último, será apresentado uma situação problema, na qual será desenvolvida e analisada através de referencial teórico e prático.

Os principais autores utilizados para a pesquisa e a elaboração da monografia foram Alitof (2011), Zill (2001), Souza, M. (2006), Javaroni (2007) e Boyce; Diprima (2015) que fornecem uma visão mais ampla, e possibilita compreender através do conceito e da história como chegamos aos conhecimentos atuais em Equações Diferenciais. Também serão utilizados autores como D'Ambrósio (1986), Lima (2017), Lisboa; Lucino (2015) e Rosa (2008) que demonstram como o ensino-aprendizagem e aplicações prática e teórica podem influenciar a vida do aluno.

2 EQUAÇÃO DIFERENCIAL

2.1 Contexto histórico

Guichard (1986, s.p.) explica que, “os conhecimentos em História da Matemática permitem compreender como chegamos aos conhecimentos atuais, porque é que se ensina este ou aquele [...]” conteúdo. Para Berlinghoff e Gouvêa (2010, p.3) “uma maneira de usar a história é fornecer uma visão mais ampla. É muito comum que os estudantes pensem na matemática da escola como uma coleção arbitrária de pedaços de informação”. Por isso, torna-se necessário que o professor utilize a história da matemática em “um dado momento, no tempo e no espaço”, para auxiliar a compreensão dos conteúdos aplicados (KARAL; et al, s.d., p.2).

Neste sentido Guichard (1986, s.p.) acrescenta que, a história da matemática traz sentido para os conteúdos,

> [...] a história da matemática permite recuperar sentido, como por exemplo, o símbolo não é tão arbitrário como por vezes se quer fazer crer. Ele é frequentemente um apanhado mnemónico da noção que guarda em si mesmo o traço das origens e a história do conceito que visa. O sinal (sigma maiúsculo), devido a Euler, é, em grego, a primeira letra da palavra soma. De igual modo o sinal (de integral) utilizado por Leibniz é também a inicial de soma e o d de dx, também imposto por Leibniz, é a inicial de diferença: estas notações lembram a origem dos conceitos que designam. O fato de eles terem sido adotados e conservados não se deve ao acaso. Eis o que dizia Leibniz a respeito do dx: "Se o nosso adversário (Newton) tivesse tido conhecimento desta relação (entre as potências e as diferenças) não teria utilizado, para indicar os diversos tipos de diferenças, as letras (y) que não são apropriadas à designação do grau geral de uma diferença, mas teria conservado a notação "d" que o nosso jovem (Leibniz, quando jovem) tinha imposto, ou outra similar, porque assim "d" pode exprimir uma diferença de grau indeterminado". (GUICHARD, 1986, s.p.).

Para Vigilato (2017), nos últimos 300 anos as equações diferenciais vem sendo “o mais importante ramo da matemática, além de ser o coração da análise e do cálculo”, ela é uma ferramenta de grande valia para a matemática aplicada nas áreas da matemática e das ciências.

Na história das Equações, Alitolef (2011, p.9) afirma que,

> Os primeiros conceitos de Equações Diferenciais tiveram seu início na Europa com a descoberta do cálculo diferencial e integral no século XVII, conceitos de fundamental importância para a solução de diversos problemas da matemática. (ALITOLEF, 2011, p.9).

Boyce; Diprima (2015) argumentam que, os matemáticos Newton e Leibniz foram os primeiros a estudar as Equações Diferenciais,

> As equações diferenciais começaram com o estudo do cálculo por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) durante o século XVII. Apesar de Newton ter atuado relativamente pouco na área de equações diferenciais propriamente ditas, seu desenvolvimento do cálculo e a elucidação dos princípios básicos da mecânica forneceram a base para a aplicação das equações diferenciais

> [...], especialmente por Euler. Leibniz era basicamente autodidata em matemática, já que seu interesse no assunto desenvolveu-se quando ele tinha vinte e poucos anos. Leibniz chegou aos resultados sobre cálculo independentemente, embora um pouco depois de Newton, mas foi o primeiro a publicá-los, em 1684. Leibniz compreendia o poder de uma boa notação matemática, e a nossa notação para derivada $\frac{dy}{dx}$, assim como o sinal de integral, são devidos a ele. (BOYCE; DIPRIMA, 2015, p.22).

Boyce; Diprima (2015) acrescentam que, os irmãos Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748) contribuíram no desenvolvimento de métodos para resolver equações diferenciais, assim como o matemático Daniel Bernoulli (1700-1782) em que seus interesses eram principalmente em equações diferenciais parciais e suas aplicações. Para Vigilato (2017, p.17), Johann Bernoulli "foi o primeiro matemático a compreender o cálculo de Leibniz, fazendo assim uma modelação matemática com fenômenos físicos usando equações diferenciais para encontrar suas respectivas soluções".

Muitos matemáticos, ainda no século XVII, acumulavam técnicas para resolver e observar as diversas equações, porém, muitas ainda eram incomuns. "O andamento das equações diferenciais necessitavam de um instrutor para estabelecer e estender os métodos presentes, e conceber inovações mais desenvolvidas sobre técnicas para atacar grandes famílias de equações", assim durante quase 50 anos, diversos casos de técnicas de resolução que aparentemente pareciam ser de fácil resolução, se tornaram difíceis e enganaram alguns estudiosos, porém, neste exato momento, o matemático Leonhard Euler (1707-1783) roubou à cena das equações diferenciais (VIGILATO, 2017, p.18).

"Euler teve o privilégio dos trabalhos anteriores, mas a chave para seu pensamento era seu conhecimento e percepção de funções, em condições particulares ou procedimentos de resolução, [...] propriedades e definições" (VIGILATO, 2017, p.19).

No século XVIII, Leonhard Euler foi o primeiro a entender funções diferenciais, logarítmicas, trigonométricas, "desenvolveu várias funções baseadas em soluções em séries de tipos especiais de equações diferenciais", método de variação de parâmetros, além do "uso de aproximações numéricas e o desenvolvimento de métodos numéricos, os quais proveram "soluções" aproximadas para quase todas as equações" (PROVENZANO, 2010, s.p.). Ainda neste período, surgem Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), entre outros. Todos estes inventores fizeram seus trabalhos, e produziram ideias inteiramente novas e sofisticadas pelo pouco acesso à informação e comunicação que existia naquele tempo.

Durante o século XIX, Gauss e Cauchy desvendaram as teorias e conceitos de funções de variáveis complexas,

> Gauss foi contribuidor para a astronomia, já Cauchy desenvolveu os métodos das categorias Cauchy, na qual é importante na análise e solução de várias equações diferenciais parciais, foi o primeiro a definir completamente as ideias de convergência e convergência absoluta de séries infinitas, e iniciou uma análise rigorosa de cálculo e equações diferenciais, tornou-se o primeiro a desenvolver uma teoria sistemática para números complexos e [...] a transformada de Fourier para prover soluções algébricas para equações diferenciais. (VIGILATO, 2017, p.19).

No século XX, os estudos das equações diferenciais foram mais teóricos, ainda assim, o matemático Lipschitz com a ajuda de Hermite, Carl Runge, Kutta-Joukowski "desenvolveram teoremas de existência para soluções de equações diferenciais de primeira ordem". Contudo, no final do século XX, as equações diferenciais começam a ganhar espaço na computação para dar soluções rápidas e eficientes em sistemas complicados de geometrias complexas de grande escala, e em áreas como análise, álgebra, geometria e teoria dos números (VIGILATO, 2017, p.19).

2.2 Aplicações e definição das Equações Diferenciais

De acordo com Souza, A. (2017, p.10), as Equações Diferenciais são "importantes ferramentas matemáticas, e são fundamentais para a solução de problemas relacionados à determinados fenômenos advindos de diversas ciências".

As equações Diferenciais possuem aplicações em diversas áreas do conhecimento e no cotidiano das pessoas, a seguir será apresentado algumas áreas que as utilizam:

- Engenharia – nas indústrias petrolíferas as Equações Diferenciais são utilizadas para cálculo de volumes de reservatórios, escoamento, tensão de cisalhamento, viscosidade, sustentação de túneis, poços e minas subterrâneas e outras características (Figueiredo, 2016).

Figura 1: Equações Diferenciais na Engenharia.

Fonte: FIGUEIREDO (2016, p. 16).

- Biologia – o uso das Equações Diferenciais é essencial para compreender a transmissão de um processo infecto contagioso nos sistemas imunológicos da população de determinada localidade contra um anticorpo, ou seja, relacionar a transmissão de um vírus a uma certa quantidade de indivíduos (NÓBREGA, 2016, s.p.).

Figura 2: Equações Diferenciais na área de Biologia.

Fonte: CAMPO... (2013, s.p)

- Química – as equações Diferenciais são utilizadas nas reações químicas para determinar a taxa, a velocidade da reação, ou a quantidade necessária de uma substância (reagente) para transformar em outra substância (produtos) (SILVA, V., s.d., s.p.).

Figura 3: Equações Diferenciais na Química.

Fonte: FOGAÇA (2019, s.p.).

- Física – as equações Diferenciais são usados em circuitos elétricos para se obter uma relação de cargas num determinado circuito, para conhecer a potência necessária para não ocorrer um curto-circuito em equipamentos eletrônicos, entre outros (TEIXEIRA, 2016).

Figura 4: Equações Diferenciais na Física.

Fonte: TEIXEIRA (2016, s.p.).

Para Zill (2001), o estudo das equações diferenciais demanda um certo conhecimento prévio em cálculo, assim, quando os cientistas e físicos usam o cálculo, geralmente “o fazem para analisar uma equação diferencial surgida no processo de modelagem de algum fenômeno que eles estão estudando” (STEWART, 2007, p. 583).

Souza, M. (2006) complementa que, além de conhecimentos prévios é necessário construir modelos simples e básicos para resolver as equações diferenciais,

> A principal razão para se resolver muitas equações diferenciais é tentar aprender alguma coisa sobre o processo físico subjacente que, acredita-se, a equação modela. Uma das razões básicas da importância das equações diferenciais é que mesmo as equações mais simples correspondem a modelos físicos úteis, como o crescimento e decaimento exponenciais, os sistemas massa – mola ou os circuitos elétricos. A compreensão de um processo natural complexo é obtida, em geral, através da compreensão, ou construção, de modelos mais simples e básicos. Assim, um conhecimento profundo desses modelos, das equações que os descrevem e suas soluções é o primeiro passo indispensável na direção da solução de problemas mais complexo e realistas. (SOUZA, M., 2006, p.6).

Na definição de Equações Diferenciais, Zill (2001, p.1) afirma que, "a palavra *diferencial* e *equações* obviamente sugerem a resolução de algum tipo de equação envolvendo derivadas", por isso, equação diferencial pode ser entendida como uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes (SOUZA, M., 2006).

Numa visão bem simplória sobre equações diferenciais, Javaroni (2007, p.28) afirma que, podemos comparar o universo matemático com a visão complementar de mundo do filósofo Heráclito[1] - "a única constante, o único conceito que nunca muda é o de que tudo está sempre mudando",

> Pensando como Heráclito, o que se tem, na Natureza, a observar são as mudanças e como elas ocorrem. Informalmente, podemos dizer, nas palavras do universo matemático, que dado um fenômeno f(t), "seu jeito de mudar" pode ser observado analisando suas derivadas, caso existam. Isto é, podemos observar $\frac{df(t)}{dt}, \frac{d^2f(t)}{dt^2}, \dots, \frac{d^nf(t)}{dt^n}$ e inferir sobre f(t). Dessa forma, podemos dizer que a mudança que se "vê" na Natureza pode ser descrita por f'(t), f''(t), f'''(t),..., e o que procuramos, ou melhor, o que queremos identificar, em geral, é f(t). (JAVARONI, 2007, p.28).

Neste contexto, Machado (1988, p.153) define equação diferencial com a seguinte pergunta: "Qual a função cuja derivada satisfaz a seguinte relação? Ou seja, uma equação diferencial é uma equação onde a incógnita é uma função e que sua resolução envolve sua derivada ".

Por isso, torna-se necessário compreender as características de cada equação diferencial como o tipo, a ordem, o grau e a linearidade, para tentarmos resolvê-la da melhor forma possível, porém quando isso não acontece precisamos recorrer a técnicas que nos auxiliem nestas resoluções, como métodos numéricos e/ ou análise qualitativa para obter informação sobre o comportamento da função solução procurada (JAVARONI, 2007).

---

[1] Heráclito de Éfeso foi um filósofo pré-socrático considerado o "pai da dialética".

2.3 Tipo de uma Equação Diferencial

Para Souza, A. (2017, p.10), “existem dois tipos de Equações Diferenciais: as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e as Equações Diferenciais Parciais (EDP) ”.

Uma EDO é aquela cuja função incógnita depende apenas de uma variável independente, enquanto a EDP é aquela cuja função incógnita depende de duas ou mais variáveis independentes (BRONSON; COSTA, 2008, p. 15).

Sodré (2003, p.1) afirma que, uma EDO apresenta a seguinte estrutura: “$f\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0$ (2.3.1), envolvendo uma função incógnita $y = y(x)$ e suas derivadas ou suas diferenciais, em que x é uma variável independente, y é a variável dependente e o símbolo y^n denota a derivada de ordem n da função $y = y(x)$”.

Por exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 7 \qquad (2.3.1.1)$$

$$\frac{d^2y}{dx} + 3\frac{dy}{dx} + 7y = 0 \qquad (2.3.1.2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.3.1.3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad (2.3.1.4)$$

As equações diferenciais (2.3.1.1) e (2.3.1.2) são do tipo EDO, pois, cada equação contém uma variável dependente (*y*) e uma variável independente (*x*), porém, as equações (2.3.1.3) e (2.3.1.4) são do tipo EDP, pois, a equação (2.3.1.3) contém uma variável dependente (*z*) e duas variáveis independentes (*x* e *y*), enquanto que a equação (2.3.1.4) contém duas variáveis dependentes (*f* e *v*) e duas variáveis independentes (*x* e *y*). No entanto, é importante ressaltar que a quantidade de variável dependente não define a EDO ou a EDP (VIGILATO, 2017).

2.4 Ordem e Grau de uma Equação Diferencial

Santos (2014, p.12) afirma que, para identificar a ordem de uma equação diferencial “basta observar qual a maior indicação diferençável de (*y*) e para designar grau, observa-se o expoente maior da equação de índice diferençável maior”, ou seja, “dada uma Equação Diferencial qualquer, a derivada de maior ordem que a compõe define a ordem da ED [...]. Esta definição de ordem [...] é válida tanto para EDO quanto EDP” (SOUZA, A., 2017, p.12).

Para Zill (2003, p.3), uma equação diferencial de n-ésima ordem é frequentemente representada pelo simbolismo *n*, ou seja, $F\left(x, y(x), \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$ (2.4.1). A forma geral, da equação (2.4.1), pode também ser escrita como $F(x, y, y', y'', \dots y^n)$, em que, a equação deve incluir a variável independente, a variável dependente e suas derivadas até a n-ésima derivada.

Toda equação é chamada de primeira ordem, quando possui índice de derivação um, quando a função $f = f(x, y)$ pode ser transcrita na razão $y' = \frac{M(x,y)}{-N(x,y)}$, ou pode ser melhor organizada na forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$. As equações de segunda ordem é da forma $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$, em que $a = a(x),\ b = b(x),\ c = c(x)$ e $d = d(x)$, são funções conhecidas somente da variável independente *x*, ou seja, para identificar "uma equação de segunda ordem, basta também que o maior indicativo de derivação dessa equação seja dois (SANTOS, 2014).

Exemplo:

$$xy' + y = 4 \tag{2.4.1.1}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 6\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^3 \tag{2.4.1.2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = y^2 + x \tag{2.4.1.3}$$

A equação (2.4.1.1) é de primeira ordem, enquanto que, a equação (2.4.1.2) possui a derivada $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ de segunda ordem, e a derivada $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^3$ de primeira ordem, com expoente 3 e grau 3, que a torna de segunda ordem, pois, a ordem de toda equação é sempre da derivada maior, e a equação (2.4.1.3) é de segunda ordem.

2.5 Linearidade de uma Equação Diferencial

Santos (2014, p. 14) explica que, "equações diferenciais lineares são aquelas que obedecem às estruturas de uma função linear, onde o maior grau da função estudada é zero", ou quando pode ser escrita ou reescrita da forma da equação (2.5.1), em que $a_0, a_1, a_{n-1}, \dots, a_n\ e\ g$ são funções somente de x.

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{2.5.1}$$

As equações diferenciais que não podem ser escritas no formato (2.5.1), e que tenham a variável dependente de grau maior que um, e coeficiente não dependente apenas da variável independente são chamadas de equações não-lineares. Assim, para que uma equação seja linear ela precisa satisfazer duas condições: a variável dependente e suas derivadas devem ser de primeiro grau, e cada coeficiente depender somente da variável independente (VIGILATO, 2017, p. 22).

Exemplo:

$$x\,dy + ydx = 0 \qquad (2.5.1.1)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \qquad (2.5.1.2)$$

$$yy'' - 2y' = x \qquad (2.5.1.3)$$

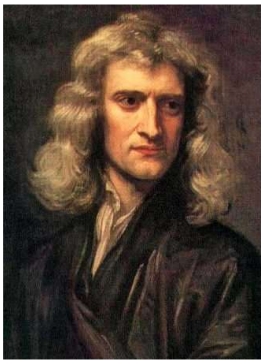
$$\frac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 0 \qquad (2.5.1.4)$$

As equações diferenciais (2.5.1.1) e (2.5.1.2) satisfazem as condições das equações lineares e podem ser escritas no formato da equação (2.5.1), logo são lineares. Porém, as equações (2.5.1.3) e (2.5.1.4) "é não-linear, pois o coeficiente depende de y, e por definição para ser linear cada coeficiente pode depender somente de x" (SOUZA, A., 2017, p.14).

3 HISTÓRIA DE ISAAC NEWTON

Isaac Newton nasceu em 1643, prematuro, numa pequena aldeia de Woolsthorpe, na Inglaterra. Frazão (2019, s.p.) afirma que, Newton manifestou suas habilidades manuais ainda quando criança, ele "fez um moinho de vento, que funcionava, e um quadrante solar de pedra, que se acha hoje na Sociedade Real de Londres".

Figura 5: Foto de Isaac Newton.



Fonte: CASTRO (s.d., s.p.).

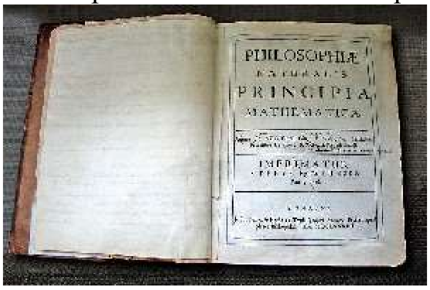
Na escola de King's School, Newton era um aluno mediano, após uma briga com seu colega de classe, começou a se esforçar nos estudos e, em muito pouco tempo, ele foi considerado um dos melhores alunos da escola. Aos 18 anos, foi aceito na Universidade de Trinity College, em Cambridge, e em 1665 forma-se bacharel em Artes (DELECAVE, s.d.).

Durante os anos de 1665 e 1667, devido a epidemia da peste negra, Newton volta para casa e faz descobertas importantes como os métodos de cálculo diferencial e integral, Delecave (s.d.) complementa que, após este período Newton continuou seus estudos em matemática e foi reconhecido mundialmente,

> [...] fez estudos em matemática e foi eleito professor da matéria em 1669. Em 1670, começou a dar aulas de ótica. Nesta época demonstrou como, através de um prisma, é possível separar a luz branca nas cores do arco-íris. Em 1679, o cientista inglês

> voltou-se para mecânica e os efeitos da gravitação sobre as órbitas dos planetas. Para isso partiu das leis de Kepler sobre o movimento dos planetas. Em 1687, publicou o livro *Principia Mathematica,* em que demonstrou as três leis universais do movimento. Ele usou a palavra grega *gravitas* (que significa peso) para definir sua lei da gravitação universal. Com este livro, Newton ganhou reconhecimento mundial. Newton foi sagrado cavaleiro da coroa britânica pela Rainha Anne, em abril de 1705. (DELECAVE, s.d., s.p.).

Figura 6: Livro "Principia Mathematica" escrito por Isaac Newton.



Fonte: DELECAVE (s.d.)

Com o passar do tempo, Newton torna-se cientista, químico, físico, mecânico e matemático, ele também descobre o binômio de Newton e a lei de Resfriamento. Para Westfall (2001, p.256), Newton descobriu o Método de Aproximação e a Regra para Redução a uma série de binômios, o Método das Tangentes de Gregory e Slusius, o Método de Fluxões e o seu inverso e a Teoria das Cores.

De acordo com Frazão (2019, s.p.), nos seus últimos anos de vida Newton amplia suas descobertas,

> Inventou um novo sistema matemático de cálculo infinitesimal, aperfeiçoou a fabricação de espelhos e lentes, fabricou o primeiro telescópio refletor, descobriu as leis que regem os fenômenos das marés, numa época que as atividades econômicas dependiam da navegação marítima. Isaac Newton fez previsões para o fim do mundo baseadas nas escrituras bíblicas, especialmente, no livro de Daniel, e que o acontecimento seria em 2060, do calendário gregoriano. (FRAZÃO, 2019, s.p.).

Newton nunca se casou e nem teve filhos ou herdeiros, faleceu em 1727 e seus estudos são sua maior herança para a humanidade.

4 LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON

A lei de Resfriamento de Newton foi originalmente formulada em 1701 quando Isaac Newton tinha 60 anos, ele publicou anonimamente o artigo "Scala Graduum Caloris", descrevendo um método para medir temperaturas de até 1.000ºC, nas quais eram impossíveis naquela época (SILVA, J., 2010). Neste artigo Newton "notou depois de algumas manipulações matemáticas que a taxa de mudança de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e sua vizinhança" (ALITOLIF, 2011, p. 19).

Para Oliveira (2010, p.30), "a lei de resfriamento de Newton é baseada no equilíbrio térmico, ou seja, quando um corpo é exposto a uma temperatura ambiente que seja menor do que a temperatura do corpo, ele tende a resfriar até atingir uma temperatura que seja igual ou aproximada da temperatura do ambiente que está inserido”.

Alitolif (2011) afirma que, esta Lei é uma aplicação em equação diferencial utilizada para resolver problemas relacionados à variação de temperatura, assim,

> Esta forma de aplicação é ligada diretamente a física, mas cálculos voltados para as leis de temperatura são de grande utilidade em várias outras ciências, alguns exemplos são os utilizados nas engenharias, na variação de temperatura de uma simples xícara de café durante o seu resfriamento ou no derretimento de uma bola de sorvete, ou ainda no processo de resfriamento de um bolo, entre outras aplicabilidades deste modelo. (ALITOLIF, 2011, p.18).

Para Zill (2001, p. 107), “a taxa de variação de temperatura T(t) de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo (T) e a temperatura constante T_m do meio ambiente, isto é, $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$ (4.1), em que k é uma constante de proporcionalidade”, que depende do material com que o corpo foi construído e o sinal negativo indica que a temperatura do corpo está diminuindo com o passar do tempo, em relação à temperatura do meio ambiente (OLIVEIRA, 2010, p.31).

Oliveira (2010, p.31) sugere que, para determinar a taxa que um corpo tende a se resfriar é necessário identificar alguns fatores como: a diferença de temperatura, a superfície que é exposta, o calor específico, as condições do ambiente e o tempo que o corpo esteve exposto com a temperatura.

As condições para que o modelo seja aceito é tomar as hipóteses (i), (ii), (iii), como verdadeiras, sendo que (i) toma que a temperatura $T = T(t)$ dependa do tempo e seja a mesma em todos os pontos do material observado, (ii) a temperatura do meio (T_m) permaneça constante no decorrer da prática e (iii) que a taxa de variação da temperatura no decorrer do tempo (t) obedeça a condição da lei de resfriamento de Newton.

Observa-se facilmente que (4.1) é uma equação linear e separável e que sua solução é dada por $T(t) = T_m + c.e^{kt}$, onde c é um número real. Vale ressaltar nessa solução que, a constante de proporcionalidade terá $k < 0$, indicando que a temperatura do material observado diminua com o decorrer do tempo, ou seja, o fato da constante ser menor que zero (negativa) em alguns estudos mostram que o corpo obedece a condição do processo de resfriamento, enquanto que a constante $k > 0$ (positivo) o processo será de aquecimento.

Segundo Silva J. (2010), essa constante de proporcionalidade é representada pela razão, $k = \frac{\alpha S}{mc}$ em que,

> α é o coeficiente de troca de calor e depende da forma, tamanho do corpo e do contato entre o corpo e o meio que o rodeia, pois, podemos

> verificar que quanto maior for a superfície de contato entre o corpo e o meio externo (ambiente) maior será a rapidez de resfriamento [...], *S* representa a área do corpo, *m* a sua massa e *c* o calor específico do material do corpo, sabe-se que quanto maior o valor do calor específico do material do corpo, uma maior quantidade de energia será necessária para variar a sua temperatura. (SILVA, J., 2010, p.49-50).

Uma boa aplicação da Lei de Resfriamento de Newton é dada por um problema motivador que aqui nomeamos de Exemplo 1:

Quando um bolo é retirado do forno, sua temperatura é de 300ºF. Três minutos depois, sua temperatura passa para 200ºF. Quanto tempo levará para sua temperatura chegar a 70 graus, se a temperatura do meio ambiente em que ele foi colocado for de exatamente 70ºF? (ZILL, 2001, p.107).

Solução:

Fazendo a identificação de todos os dados exposto pelo Exemplo 1, temos que:

A temperatura do bolo no tempo inicial é t(0)=300°F, a temperatura do bolo decorrido 3 minutos é t(3)=200ºF, a temperatura do meio circulante (ambiente) é T_m= 70ºF e queremos saber qual o tempo t(?) que o bolo atinge 70°F.

Aplicando a equação (4.1) com T_m= 70ºF, temos:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 70)$$

$$\frac{dT}{dt} = k(70 - T)$$

$$\frac{dT}{70-T} = k(dt),$$

Aplicando a integral nos dois membros da equação,

$$\int \frac{dT}{(70-T)} = \int k\ dt,$$

$$ln|70 - T| = kt + c,$$

Aplicando a função exponencial nos dois membros da equação,

$$e^{\ln(70-T)} = e^{kt+c}$$

$$e^{kt+c} = 70 - T$$

$$T = 70 - \ e^{kt}.e^{c}$$

$$T = 70 - ce^{kt}\ , \qquad (4.1.1)$$

Fazendo $e^c = c$. Para obter o valor da constante c da equação (4.1.1), tomamos os valores de t=0 e T=300ºF:

$$300 = 70 - ce^{k(0)}$$

$$300 - 70 = -c(1)$$

$$230 = -c.(1)$$

$$c = -230,$$

Substituindo o valor encontrado de *c* na equação (4.1.1), temos:

$$T = 70 + 230e^{kt}, \tag{4.1.2}$$

Agora trabalhamos com as outras informações que o problema nos traz, ou seja, t (3) = 200ºF, substituímos na equação (4.1.2):

$$200 = 70 + 230e^{(3)k}$$

$$200 - 70 = 230e^{3k}$$

$$130 = 230e^{3k}$$

$$\frac{130}{230} = e^{3k}$$

Resolvendo esta equação exponencial, temos que,

$$ln\ \frac{13}{23} = ln\ e^{3k}$$

$$-0{,}570544859 = 3\text{k}$$

$$\frac{-0{,}570544859}{3} = \text{k}$$

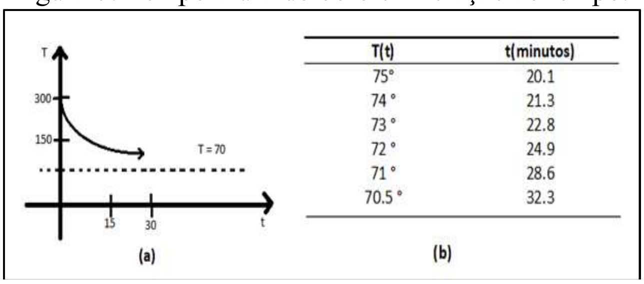
$$k = \ -0{,}190181619$$

Portanto, a função que descreve a temperatura deste bolo em relação ao tempo é:

$$T = 70 + 230e^{-0{,}190181619t}.$$

Para determinar o tempo que o bolo leva para chegar a 70ºF, se a temperatura do meio ambiente em que ele foi colocado for exatamente 70ºF, não tem uma solução finita, pois isso matematicamente ocorreria quando o tempo tendesse ao infinito, intuitivamente, esperamos que o bolo atinja a temperatura de seu meio ambiente após um certo período de tempo, por isso, a Figura (7) mostra claramente que o bolo estará aproximadamente em sua temperatura ambiente de 70ºF em cerca de meia hora.

Figura 7: Temperatura do bolo em relação ao tempo.



T(t)	t(minutos)
75°	20.1
74 °	21.3
73 °	22.8
72 °	24.9
71 °	28.6
70.5 °	32.3

Fonte: ZILL, 2001, p. 107

4.1 Aplicação da Lei de Resfriamento de Newton

A lei de Resfriamento de Newton é muito utilizada em situações em que ocorre a variação de temperatura de um corpo com o meio ambiente. Silva J. (2010), descreve alguns casos do dia a dia em que ela é aplicada:

- Na mudança de têmpera em peças de aço – para manter a dureza e elasticidade o aço é tratado termicamente através de aquecimento e resfriamento, depois a peça é inserida em um forno que está a uma temperatura determinada, assim com o auxílio da Lei de Resfriamento de Newton é possível determinar o tempo necessário para permanência da peça no forno até que ela atinja a forma desejada (SILVA, J., 2010).

Figura 8: Mudança de Têmpera em peças de aço.

Foto: MTCTRAT

- Resfriamento de materiais biológicos para preservação – para permitir a conservação das propriedades quantitativas e qualitativas desejáveis dos materiais (frutos ou verduras) em estado quase inalterado e natural, ou seja, antes de ser armazenado, processado ou comercializado, o material é resfriado em câmaras de refrigeração para que durem por dias ou até meses. Assim, a Lei de Resfriamento de Newton é usada para determinar o tempo necessário para que o material atinja a temperatura necessária para o seu devido armazenamento (SILVA, J., 2010).

Figura 9: Refrigeração de frutas em câmeras frias.

Fonte: DOCPLAY (2016).

- Resfriamento de leite cru – ao abaixar a temperatura do leite retardamos os processos químicos e o crescimento microbiano, evitando desta forma a queda da qualidade do produto. A Lei de Resfriamento de Newton determina quanto tempo o leite deve permanecer em tanques de resfriamento para que se obtenha a temperatura desejada para sua conservação (SILVA, J., 2010).

Figura 10: Resfriamento de leite cru em tanques.

Fonte: CORREIO... (2018).

- Exame pericial de cadáveres – quando um cadáver é encontrado em condições suspeitas, um perito criminal pode determinar a hora em que ocorreu o óbito por meio da Lei de Resfriamento de Newton (SILVA, J., 2010).

Figura 11: Perícia criminal no local do crime.

Fonte: IBAP (s.d.).

Estas são apenas algumas das diversas aplicabilidades que está fabulosa Lei é utilizada.

5 TEORIA E PRÁTICA NA LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON

Lisboa; Lucino (2015, p.30) afirmam que, um dos grandes motivos para o abandono escolar, e possivelmente na dificuldade de aprendizagem é a falta de relação entre os conteúdos aplicados com as situações enfrentadas no cotidiano dos estudantes, ou seja, eles veem que o que é ensinado em sala de aula não possui aplicação alguma na vida real.

Rosa (2008, p.09) complementa que, “para tornar o ensino estimulante e atrativo, o professor deverá refletir sobre sua própria prática pedagógica, transformando-se em um professor pesquisador”, assim, ele conseguirá unir a teoria e a prática no ensino da matemática trazendo para dentro da sala de aula a Matemática Realista.

Para D’Ambrósio (1986, p.43), a pesquisa é considerada o grande elo entre teoria e prática, por isso, cabe ao professor fundamentar em uma teoria princípios metodológicos que contemplem a prática em sala de aula. Desta forma, a matemática se tornará algo indispensável e essencial na vida dos alunos e também da comunidade que será conscientiza do grande valor que a matemática ocupa em suas vidas e principalmente o quanto ela é útil e necessária, nesta vertente D’Ambósio (1986) complementa que,

> O valor da teoria se revela no momento em que ela é transformada em prática. No caso da educação, as teorias se justificam na medida em que seu efeito se faça sentir na condução do dia-a-dia na sala de aula. De outra maneira, a teoria não passará de tal, pois não poderá ser legitimada na prática educativa. (D`AMBROSIO, 1986, p. 43).

De acordo com Javaroni (2007, p.28), para entender teoria e prática podemos utilizar a metáfora da fotografia e da janela – "ao se olhar o mundo através de fotografia, essa visão é estática, estou vendo aquilo que se mostra na foto naquele instante. No entanto, se observo o mundo através da janela, a visão é dinâmica e o que vejo na verdade são as mudanças que estão ocorrendo".

Rosa (2008, p.20) complementa que, o ensino da matemática frequentemente é aplicado de forma quantitativa,

> O ensino de matemática é mais quantitativo, enquanto deveria ser mais qualitativo, onde o aluno aprende a calcular, mas não sabe utilizar o resultado. […] você lembra o número de telefone da sua mãe, não lembra? É um número útil, que você utiliza sempre. Com a tabuada é a mesma coisa. Se ela tiver utilidade, será lembrada". (ROSA, 2008, p.20 apud CARTA NA ESCOLA, 2007/2008, nº22).

A relação entre teoria e prática nas aulas de matemática propicia ao aluno a oportunidade e a necessidade de buscar por si só seus próprios interesses, adquirir novas experiências, participar ativamente das aulas e formular suas próprias opiniões, e consequentemente facilitar sua aprendizagem. Para evidenciar essa relação entre a teoria e a prática foi desenvolvida uma aplicação onde houve a necessidade de modelar o fenômeno observado.

5.1 Planejamento e execução da aplicação prática.

O planejamento da aplicação prática consistiu em escolher um cômodo fechado de uma casa e medir sua temperatura (ambiente), depois levar uma xícara de café quente neste cômodo e fazer as medições do líquido a cada 5 minutos, considerando o tempo total de 30 minutos. Dos materiais necessários foram utilizados:

- Uma xícara de porcelana, de aproximadamente 300ml, apresentado na Figura [15];
- Um termômetro de ambiente com medições de -40 a 50ºC, e precisão de ± 1ºC (conforme informações do fabricante), sendo que o material é de plástico e o tubo de mercúrio, apresentado na Figura [12];
- Um termômetro culinário digital com medições de -50 a 300ºC, e precisão de ± 2ºC (conforme informações do fabricante), em que o material da haste é de aço inox e cabo de polipropileno, mais precisamente um termoplástico, apresentado na Figura [13];
- Um cronômetro para medir os intervalos de tempo, apresentado na Figura [14];

- E o ambiente escolhido para realização do experimento foi um quarto fechado, apresentado na Figura [17].

Figura 13: Termômetro de temperatura de ambiente.

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 12: Termômetro de temperatura de alimentos.

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 14: Cronômetro.

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 15: Xícara de porcelana.

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 17: Café quente.

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 16: Quarto para realização do experimento.

Fonte: Elaborada pela autora.

A execução da aplicação prática deu-se da seguinte forma: foi realizado um experimento no dia 27 de janeiro de 2019, no período da manhã após as 10 horas, em que, o termômetro de temperatura foi fixado na parede do quarto (no dia anterior ao experimento) e feita a medição da temperatura do ambiente (no dia do experimento) que se encontrava a aproximadamente 28,7ºC.

Logo em seguida, o café que estava ao fogo é despejado na xícara e o termômetro de temperatura de alimentos é inserido nela, após atingir a temperatura máxima de 84°C o cronômetro é acionado, o café é levado até o quarto e são feitas as medições do líquido a cada 5 minutos, considerando o tempo previamente estipulado de 30 minutos. É importante ressaltar, que a temperatura do ambiente foi medida no início e no fim do experimento, e não houve alteração do valor.

Figura 18: Medição da temperatura do café.

Fonte: Elaborada pela autora.

Ao final do experimento foi obtido os dados que estão apresentados na Tabela [1]:

Tabela 1: Resultados do experimento com intervalos de 5 minutos.

Tempo (minutos)	**0**	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**
Temperatura do café (ºC)	84	76,2	67,9	62	56,8	52,5	48,6

Fonte: Dados da pesquisa.

5.2 Planejamento e execução da aplicação teórica.

A partir dos dados obtidos na aplicação prática foi elaborado a seguinte situação que será resolvida por meio da Lei de Resfriamento de Newton:

Num quarto fechado, cuja temperatura ambiente permanece a 28,7ºC, coloca-se certa quantidade de café numa xícara a uma temperatura inicial de 84ºC. Após 5 minutos o café atinge 76,2ºC, determine a temperatura do café após atingir 10, 15, 20, 25 e 30 minutos.

Aplicando a equação (4.1) com T_m= 28,7ºC, temos

$$\frac{dT}{dt} = k(28{,}7 - T)$$

$$\frac{dT}{28{,}7 - T} = k(dt),$$

Integrando os dois membros da equação,

$$\int \frac{dT}{(28{,}7 - T)} = \int k\, dt,$$

$$ln|28{,}7 - T| = kt + c,$$

Aplicando a função exponencial nos dois membros da equação,

$$e^{\ln(28,7-T)} = e^{kt+}$$

$$e^{kt+c} = 28,7 - T$$

$$T = 28,7 - \ e^{kt}. e^{c}$$

$$T = 28,7 - ce^{kt} \ , \qquad (5.1)$$

Fazendo $e^c = c$. Para obter o valor da constante *c* da equação (5.1), tomamos os valores de t = 0 e T = 84ºC:

$$84 = 28,7 - ce^{k(0)}$$

$$84 - 28,7 = -c(1)$$

$$55,3 = -c.(1)$$

$$c = -55,3,$$

Substituindo o valor encontrado de *c* na equação (5.1), temos:

$$T = 28,7 + 55,3 \ e^{kt}, \qquad (5.2)$$

Para t(5) = 76,2ºC, substituindo na equação (5.2):

$$76,2 = 28,7 + 55,3 \ e^{(5)k}$$

$$76,2 - 28,7 = 55,3 \ e^{5k}$$

$$47,5 = 55,3 \ e^{5k}$$

$$\frac{47,5}{55,3} = e^{5k}$$

$$0,86 = e^{5k}$$

Resolvendo esta equação exponencial, temos que,

$$\ln 0,86 = \ln e^{5k}$$

$$-0,15 = 5\mathrm{k}$$

$$\frac{-0,15}{5} = \mathrm{k}$$

$$k = \ -0,03$$

Portanto, a função que descreve a temperatura do café em relação ao tempo é:

$$T = 28,7 + 55,3 \ e^{-0,03 \ t} \qquad (5.3)$$

Neste momento, podemos determinar a temperatura nos tempos 10, 15, 20, 25 e 30 minutos utilizando a equação (5.3),

Para T(10) = ?

$$T = 28,7 + 55,3 \ e^{-0,03 \ t}$$

$$T = 28,7 + 55,3 \ e^{-0,03 \ (10)}$$

$$T = 28,7 + 55,3 \ e^{-0,3}$$

$$T = 28{,}7 + 55{,}3\ (0{,}74)$$

$$T = 28{,}7 + 40{,}9$$

$$T \approx 69{,}6°C$$

Após atingir 10 minutos o café tem aproximadamente 69,6ºC.

Para T(15)=?

$$T = 28{,}7 + 55{,}3\ e^{-0{,}03\ t}$$

$$T = 28{,}7 + 55{,}3\ e^{-0{,}03\ (15)}$$

$$T = 28{,}7 + 55{,}3\ e^{-0{,}45}$$

$$T = 28{,}7 + 55{,}3\ (0{,}64)$$

$$T = 28{,}7 + 35{,}4$$

$$T \approx 64{,}1°C$$

Após atingir 15 minutos o café tem aproximadamente 64,1ºC.

Para T(20)=?

$$T = 28{,}7 + 55{,}3\ e^{-0{,}03\ t}$$

$$T = 28{,}7 + 55{,}3\ e^{-0{,}03\ (20)}$$

$$T = 28{,}7 + 55{,}3\ e^{-0{,}6}$$

$$T = 28{,}7 + 55{,}3\ (0{,}55)$$

$$T = 28{,}7 + 30{,}4$$

$$T \approx 59{,}1°C$$

Após atingir 20 minutos o café tem aproximadamente 59,1ºC.

Para T(25)=?

$$T = 28{,}7 + 55{,}3\ e^{-0{,}03\ t}$$

$$T = 28{,}7 + 55{,}3\ e^{-0{,}03\ (25)}$$

$$T = 28{,}7 + 55{,}3\ e^{-0{,}75}$$

$$T = 28{,}7 + 55{,}3\ (0{,}47)$$

$$T = 28{,}7 + 26$$

$$T \approx 54{,}7°C$$

Após atingir 25 minutos o café tem aproximadamente 54,7ºC.

Para T(30)=?

$$T = 28{,}7 + 55{,}3\ e^{-0{,}03\ t}$$

$$T = 28{,}7 + 55{,}3\ e^{-0{,}03\ (30)}$$

$$T = 28{,}7 + 55{,}3\ e^{-0{,}9}$$

$$T = 28{,}7 + 55{,}3\ (0{,}41)$$

$$T = 28{,}7 + 22{,}8$$

$$T \approx 51{,}5°C$$

Após atingir 30 minutos o café tem aproximadamente 51,5ºC.

Ao final da aplicação teórica, foram obtidos os resultados que estão apresentados na Tabela [2]:

Tabela 2: Resultados da aplicação teórica.

Tempo (minutos)	0	5	10	15	20	25	30
Temperatura do café (ºC)	84	76,2	69,6	64,1	59,1	54,7	51,5

Fonte: Dados da Pesquisa.

5.3 Análise dos dados da aplicação prática e da aplicação teórica.

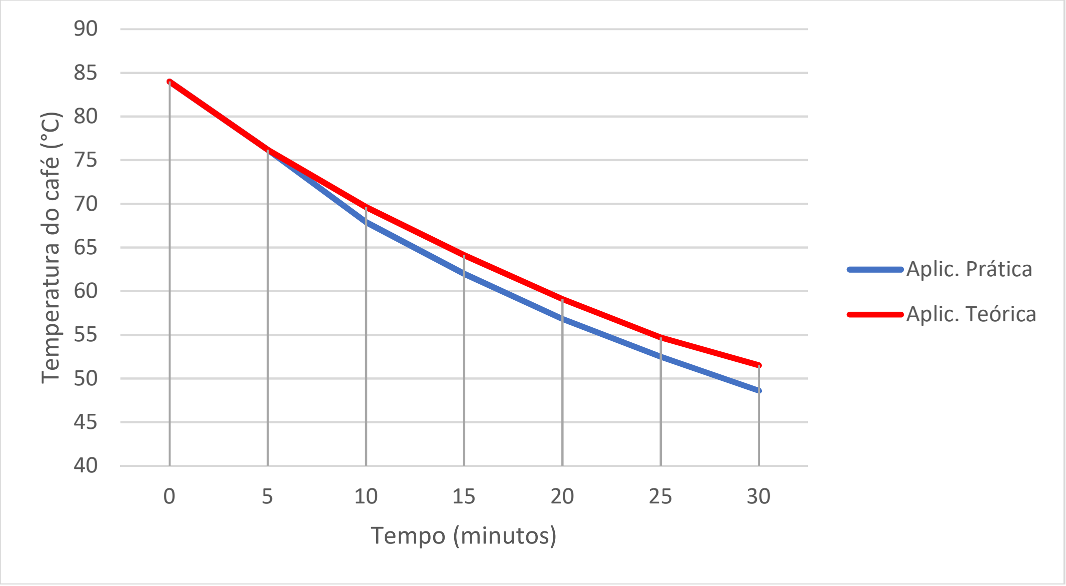
A Tabela [3] e a Figura [19] contém o comparativo entre as temperaturas das aplicações prática e teórica.

Tabela 3: Relação aplicação prática/aplicação teórica nos intervalos de 5 minutos.

TEMPO (MINUTOS)	APLICAÇÃO PRÁTICA	APLICAÇÃO TEÓRICA
0	84°C	84°C
5	76,2°C	76,2°C
10	67,9ºC	69,6ºC
15	62ºC	64,1ºC
20	56,8ºC	59,1ºC
25	52,5ºC	54,7ºC
30	48,6ºC	51,5ºC

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 19: Comparativo das aplicações práticas e teóricas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Verifica-se na Figura [19] que os dados obtidos nas duas aplicações estão bem próximos, assim, será feita uma análise mais detalhada por meio da estatística.

Moita; Neto (2010, p.12) explicam que a estatística é uma ferramenta de todas as ciências e ensina que não há medida sem erro a ela associado. "Portanto, uma medida quantitativa só é científica quando posso avaliar o seu erro. Querer uma medida sem erro (certeza absoluta) é querer abarcar o universo (100% da totalidade). Ora, fazer isto é inútil ou divino", por isso, para iniciar nossa análise é importante observar que "qualquer medida está sujeita aos mais variados tipos de erros", assim como afirma Monico; et al, (2009, p.470),

> Como consequência dos erros [...], o valor verdadeiro de uma grandeza, a rigor, nunca é conhecido, muito embora a qualidade de uma medida, grandeza ou parâmetro possa ser melhor que a de outra [...], teoricamente, o valor verdadeiro de uma grandeza é um conceito abstrato. Na prática, no entanto, pode-se dispor de uma grandeza com qualidade superior a outra, podendo-se considerá-la como de referência [...] ou verdadeira. (MONICO; et al, 2009, p.470).

Cabral (2004, p.09) complementa que é necessário identificar e quantificar as fontes de erros,

> Uma das principais tarefas de um experimentador é identificar as fontes de erro que podem afetar o processo de medição, e quantificar essas fontes de erro. Essa "falta de perfeição" é designada, atualmente, por "incerteza". A palavra "erro", que durante largos anos foi utilizada com esse mesmo significado, está hoje em dia reservada para designar o afastamento entre o valor absoluto numa medição e o correspondente valor verdadeiro, o qual é, em geral, desconhecido. (CABRAL, 2004, p.09).

Para Cabral (2004, p.09), exatidão denomina a maior ou menor aproximação dos resultados obtidos com o valor verdadeiro, enquanto que precisão está associada a dispersão de valores obtidos através de diversas repetições do experimento, assim, a exatidão dos resultados dependerá sempre da sofisticação dos aparelhos, da habilidade do pesquisador ou dos princípios físicos estudados.

> É evidente que qualquer descrição matemática de um fenômeno físico não é mais do que uma modelização teórica de algo, para permitir a sua compreensão. Essa modelização, mesmo que seja feita com um elevado grau de rigor, nunca corresponde em absoluto ao verdadeiro fenômeno em causa [...]. Por outro lado, qualquer medição é efetuada com sistemas físicos (os instrumentos de medição) com os quais procuramos quantificar determinadas características de outros sistemas físicos (os objetos a medir). Todos os sistemas físicos reais se afastam em maior ou menor grau do comportamento "ideal" previsto pelos modelos matemáticos com os quais os procuramos descrever. Mesmo após a correção de todos os erros devidos aos efeitos (sistemáticos) conhecidos, subsistem inexatidões em todos os valores medidos. (CABRAL, 2004, p.12-13).

Neste trabalho ouve o esforço de amenizar o máximo de erros possíveis, no entanto, esse esforço nunca será plenamente alcançado. No quarto em que foi realizado a aplicação prática tentou-se isolar portas e janelas com sacos plásticos, isopor e fita isolante para que não houvesse alteração da temperatura dentro do ambiente, pois os efeitos das condições ambientais como pressão atmosférica, temperatura e umidade podem comprometer ainda mais na exatidão do experimento, por isso, foram feitas medições do local (quarto) no início e no fim da aplicação e verificou-se que a temperatura permaneceu constante.

Para Gonçalves (s.d), a temperatura não muda apenas com a posição no interior do corpo, mas também com o tempo em uma mesma posição; tanto a taxa de transferência de calor através do corpo, como a energia interna do corpo mudando com o tempo, o corpo acumula ou desacumula energia interna. Bonjorno; et al, (2013) explica que, a temperatura de um corpo é medida por meio da agitação entre as partículas e que essa agitação é influenciada pela energia térmica que pode ser transmitido entre um corpo e o ambiente, afetando suas temperaturas.

> Como a energia não pode ser criada nem destruída, ela será cedida por um corpo e absorvida pelo outro, alterando o grau de agitação das partículas desses corpos ou de um corpo e do ambiente em que ele está. Por exemplo, se um corpo ceder certa quantidade de energia térmica, sua temperatura cairá, indicando uma diminuição no grau de agitação de suas partículas. Quanto maior a diferença de temperatura entre […] um corpo e o ambiente, maior será o fluxo de energia térmica entre eles. Assim, em todo ambiente sempre ocorrem trocas contínuas de energia térmica entre corpos com diferentes temperaturas. (BONJORNO; et al, 2013, p. 13).

Nesta vertente, ao verificar o início do experimento, desde a retirada do café do fogo até sua chegada no cômodo, pode ter ocorrido alteração na temperatura inicial do líquido (84°C), pois, a cozinha e o quarto estavam com temperaturas distintas (ambiente). Também podemos destacar a precisão do termômetro de temperatura de alimentos, pois, quando se faz uma medição em qualquer aparelho, como no termômetro, existe uma certa incerteza que no aparelho utilizado é de ± 2ºC, isso significa que, durante o experimento a temperatura no mostrador pode variar de 2 graus para mais ou para menos, apresentados na Tabela [4].

Tabela 4: Medidas de precisão do termômetro de alimentos.

TEMPO (MINUTOS)	**PRECISÃO (-2ºC)**	**PRECISÃO (+2ºC)**	**APLICAÇÃO PRÁTICA**	**APLICAÇÃO TEÓRICA**
0	82	86	84	84
5	74,2	78,2	76,2	76,2
10	65,9	69,9	67,9	69,6
15	60	64	62	64,1
20	54,8	58,8	56,8	59,1
25	50,5	54,5	52,5	54,7
30	46,6	50,6	48,6	51,5

Fonte: Dados da Pesquisa.

Para facilitar a compreensão e a comparação dos dados foi calculado a média aritmética simples ($\bar{x}$) dos resultados, ou seja, a medida de tendência central, que na aplicação prática é de 64°C e na aplicação teórica é de 65,6°C. Assim, estes valores nos servem de parâmetro na análise exploratória para dar a posição de cada medição nas aplicações, porém, em se tratando de temperatura existe uma variabilidade dos resultados em relação a tendência central, que para esse tipo de experimento o grau de confiança é dado pelo Desvio Padrão Amostral (S). As Tabelas [5] e [6] apresentam detalhadamente os valores nos quais se obteve os desvios padrão das aplicações.

Tabela 5: Desvio Padrão da Aplicação Prática.

I	x_i	d_i	d_i^2	$S = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n-1}}$
1	84	+20	400	
2	76,2	+12,2	148,84	
3	67,9	+3,9	15,21	
4	62	-2	4	
5	56,8	-7,2	51,84	
6	52,5	-11,5	132,25	
7	48,6	-15,4	237,16	
n = 7	$\sum = 448°C$	$\sum di = 0°C$	$\sum d_I^2 = 989{,}3$	$S \approx 12{,}84°C$

Fonte: Dados da Pesquisa.

Tabela 6: Desvio Padrão da Aplicação Teórica.

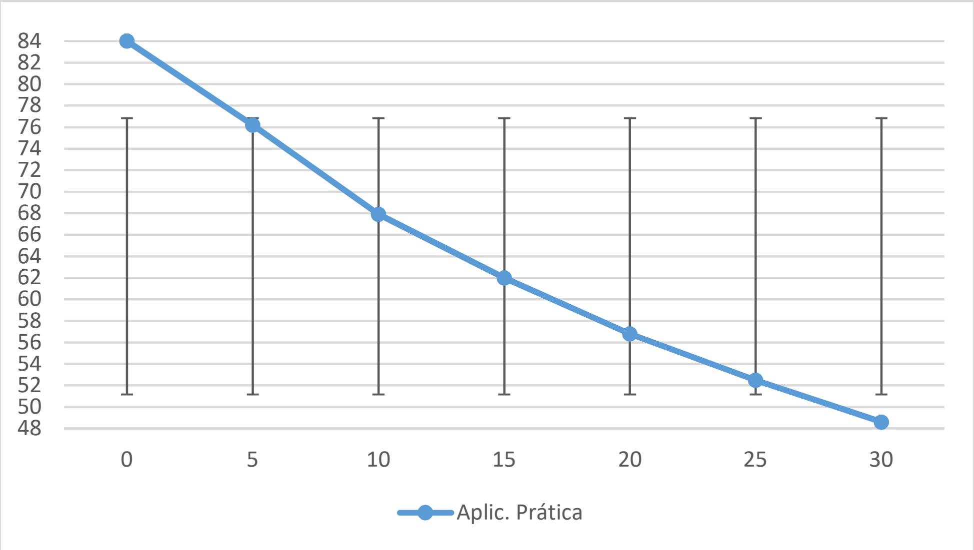
I	x_i	d_i	d_i^2	$S = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n-1}}$
1	84	+18,4	338,56	
2	76,2	+10,6	112,36	
3	69,6	+4	16	
4	64,1	-1,5	2,25	
5	59,1	-6,5	42,25	
6	54,7	-10,9	118,81	
7	51,5	-14,1	198,81	
n = 7	$\sum = 459{,}2°C$	$\sum di = 0°C$	$\sum d_I^2 = 829{,}04$	$S \approx 11{,}75°C$

Fonte: Dados da Pesquisa.

Dos dados apresentados nas Tabelas anteriores temos que: $\boldsymbol{i}$ = Número de elementos; $\boldsymbol{x_i}$ = Valores das temperaturas; $\boldsymbol{d_i}$ = Desvio em relação à média; $\boldsymbol{d_i^2}$ = Quadrado dos desvios em relação à média; $\boldsymbol{S}$ = Desvio Padrão Amostral; $\boldsymbol{\Sigma}$ = Somatório e $\mathbf{n}$ = Número total de elementos.

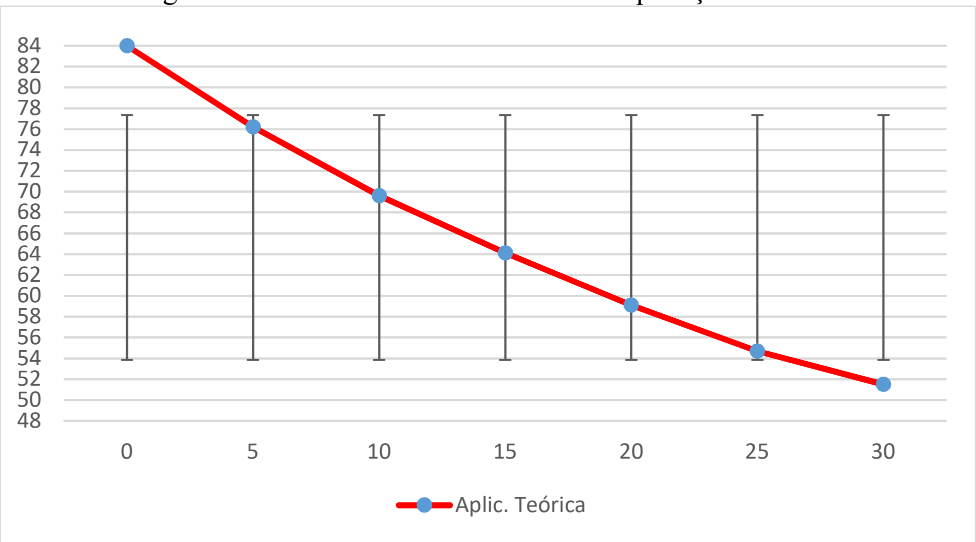
Mucelin (2010, p.56) afirma que, o Desvio Padrão Amostral é calculado com base na média de uma amostra, assim, no experimento podemos considerar a amostra no intervalo de 5 em 5 minutos durante o tempo total de 30 minutos, por isso, o denominador da fórmula do Desvio Amostral é *n-1*. É possível observar nas Figuras [20] e [21] o Desvio Padrão em relação as temperaturas de cada aplicação e suas respectivas posições.

Figura 20: Análise do Desvio Padrão da Aplicação Prática.



Fonte: Dados da Pesquisa.

Figura 21: Análise do Desvio Padrão da Aplicação Teórica.



Fonte: Dados da Pesquisa.

Para Ferreira (2017, p. 14), as estimativas de erros podem auxiliar nas dúvidas e confiabilidade das operações nos sistemas de medições, por isso, "a média e o desvio padrão de uma amostra são naturalmente influenciados pela presença de um único valor discrepante (outlier) que pode levar a conclusões inválidas", BARBOSA; PEREIRA; OLIVEIRA (2018, p.02) explicam que,

> *Outlier* é uma observação, ou um subconjunto de observações, que parecem ser inconsistentes quando comparados ao restante do conjunto [...], *outlier* é uma observação que desvia muito de outras observações despertando suspeitas de que são geradas por um mecanismo diferente. (BARBOSA; PEREIRA; OLIVIERA, 2018, p.02).

Na aplicação prática observa-se que a medida 84°C é o único valor com distância significativa do desvio padrão, porém, é preciso analisar o conjunto dos dados para verificar se esta temperatura pode ser considerada outlier, assim, alguns testes estatísticos são utilizados para aferir se o valor divergente torna o experimento anormal, como o teste Shapiro-Wilk utilizado para analisar se a amostra segue uma normalidade ou não na distribuição dos valores, assim,

> O teste de Shapiro-Wilk, apresentado em 1965, tem como finalidade calcular uma estatística de teste W e consequentemente analisar se uma determinada amostra segue uma distribuição Gaussiana. [...] o teste de Shapiro-Wilk [...], pode ser considerado como uma boa alternativa para se verificar se um conjunto de dados pode ser tratado como distribuição normal ou Gaussiana. Este teste tem como limitação o número de dados, n: $3< n \leq 50$. (FERREIRA, 2017, p.31).

Foi utilizado para calcular a normalidade da amostra no teste Shapiro-Wilk o aplicativo gratuito SisEAPRO, versão 2.0, após a inserção dos dados da pesquisa em ordem crescente o aplicativo concluiu que a probabilidade de a análise ter retratado a realidade é de 95% de confiança, ou seja, o experimento seguiu uma distribuição normal das temperaturas.

Para LIMA (2018) ao se verificar os Erros Absolutos (5.4) como a diferença entre o valor medido e o valor verdadeiro, ou seja, y é o valor do experimento e $\bar{y}$ é o valor a aplicação teórica e Erro Relativo Percentual (5.5) como a razão entre o Erro Absoluto e o valor verdadeiro, temos na Tabela [7] os erros encontrados através desta pesquisa.

$$EA_y = |y - \bar{y}| \tag{5.4}$$

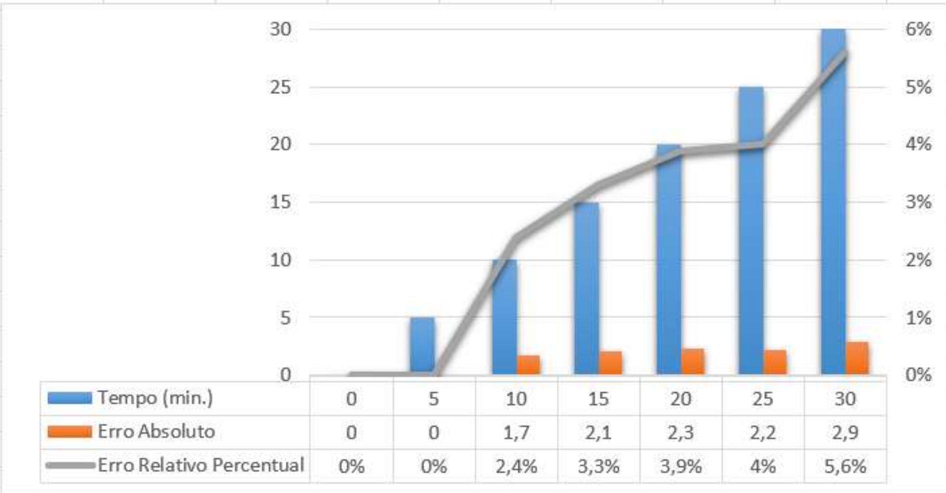
$$E_t = \frac{EA_y}{\bar{y}}.100\% \tag{5.5}$$

Tabela 7: Erro Absoluto e Erro Relativo Percentual.

Tempo (minutos)	EA_y	E_t
0	0	0%
5	0	0%
10	1,7	2,4%
15	2,1	3,3%
20	2,3	3,9%
25	2,2	4%
30	2,9	5,6%

Fonte: Dados da Pesquisa.

Figura 22: Erros Analisados.



Fonte: Dados da Pesquisa.

Ao observar a Figura [22] nota-se que o grau de afastamento entre a aplicação prática e aplicação teórica são mínimas, ou seja, o experimento se afastou em menor grau do comportamento "ideal" previsto pelos dados obtidos na Lei de Resfriamento de Newton, logo, existe exatidão em todos os valores medidos.

Portanto, podemos concluir que os resultados obtidos foram compreensíveis e satisfatórios, de modo que durante o experimento a taxa de resfriamento do café não foi influenciado pelo meio externo como condições ambientais, climáticas ou humanas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo apresentar de forma simplificada os conceitos, as características, os contextos históricos e as aplicações das Equações Diferenciais e da Lei de Resfriamento de Newton, além de resolver e analisar uma situação-problema unindo teoria e prática, assim, foi possível compreender a importância deste estudo em nossas vidas e em outras ciências.

A atividade experimental ofereceu condições para testar ideias e suposições sobre a Lei de Resfriamento, foi preciso aprender e unificar os conhecimentos nas disciplinas de física e estatística como forma de complementação do estudo. Esta pesquisa despertou o interesse e possibilitou realizar diversas tentativas, erros e acertos, exigiu paciência, concentração, persistência, muitas horas e dias de trabalho, ao final, trouxe satisfação e conhecimento, contribuiu para minha formação e mostrou que o estudo tornou-se melhor ao unir os dois tipos de aplicações (prática/teórica).

Por isso, torna-se importante ressaltar que o professor deve tentar desenvolver estratégias pedagógicas desafiadoras para auxiliar no desenvolvimento cognitivo do aluno, pois, quando nos encontramos totalmente envolvidos com os fenômenos em estudo surge então a aquisição dos conceitos como também nos sentimos responsáveis pela nossa própria aprendizagem.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALITOLEF, Sérgio dos Santos. **Algumas Aplicações das Equações Diferenciais**. Ji Paraná: UNIR, 2011.

BARBOSA, Josino J.; PEREIRA, Tiago M.; OLIVEIRA, Fernando L.P. **Uma proposta para identificação de *outliers* multivariados. Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas**. Santa Maria, MG, v. 40, e. 40, 2018.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. Tradução Elza F. Gomide e Helena Castro. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BONJORNO, V. et al. **Física:** termologia, óptica, ondulatória. 2. Ed. São Paulo: FTD, 2013.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Tradução e revisão técnica: Valéria M. Iorio. 10.ed. Rio Janeiro: LTC, 2015.

BRONSON, R.; COSTA, G. **Equações diferenciais**. tradução Fernando H. Silveira. 3.ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

CABRAL, Paulo. **Erros e Incertezas nas medições**. Rio de Janeiro: UFRJ, 2004.

CAMPO maior em foco. **Alerta**: novo vírus fatal da gripe pode ser transmitido por contato humano. Disponível em: <http://campomaioremfoco.com.br/alerta-novo-virus-fatal-de-gripe-pode-ser-transmitido-por-contato-humano.html>. Acesso em: 18 jan. 2019.

CASTRO, Daniel Santos. **Isaac Newton**. Disponível em: <https://www.infoescola.com/biografias/isaac-newton/>. Acesso em: 13 jan. 2019.

CORREIO do povo. **Novas regras para produção e padrão de qualidade do leite cru causam apreensão**. Disponível em: <https://www.guialat.com.br/?p=detalhar_noticia&id=4027>. Acesso em: 17 jan. 2019.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática.** 1ª ed. São Paulo: Summus, 1986.

DELECAVE, Bruno. **A vida de Newton**. Disponível em: <http://www.invivo.fiocruz.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?infoid=1061&sid=7>. Acesso em: 13 jan. 2019.

DOCPLAYER. **Frutas e Hortaliças:** Resfriamento 12/11/2016 técnicas de resfriamento. Disponível em: <http://docplayer.com.br/56487563-Frutas-e-hortalicas-resfriamento-12-11-2016-tecnicas-de-resfriamento-resfriamento-t-o-c.html>. Acesso em: 17 jan. 2019.

FERREIRA, Anderson L. dos Santos. **Comparação de diferentes técnicas para detecção e tratamento de *outliers* na determinação de fatores de medidores**. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2017.

FIGUEIREDO, Tiago D. O uso as equações diferenciais em estudos da engenharia: um discurso coletivo. **Revista Urutágua**: acadêmica multidisciplinar da UEM, Maringá, n.33, p.50-57, 2016.

FOGAÇA, Jennifer. **Condições para ocorrência de reações químicas**. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/quimica/condicoes-para-ocorrencia-reacoes-quimicas.htm>. Acesso em: 18 jan. 2019.

FRAZÃO, Dilva. **ISAAC NEWTON**. Disponível em: <https://www.ebiografia.com/isaac_newton/>. Acesso em: 19 jan. 2019.

GONÇALVES, Cintia B. **Transferência de calor em regime transiente**. Disponível em: <http://stoa.usp.br/cai0/files/1321/7491/TC+Transiente.pdf>. Acesso em: 07 fev. 2019.

GUICHARD, Jean Paul. **História da Matemática no ensino da Matemática**. Adaptação livre de Arsélio Martins. IREM de Lyon in Bouvier, A. (coord), Didactique des Mathématiques, Cedic/Nathan, 1986.

IBAP. **Curso de perícia criminal:** genética forense da cena do crime ao DNA. Disponível em: <https://ibapcursos.com.br/cursos/curso-de-pericia-criminal-genetica-forense/>. Acesso em: 17 jan. 2019.

JAVARONI, S. L. **Abordagem geométrica**: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias. 2007. 231 f. Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociência e Ciências Exatas, 2007. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/102149>. Acesso em: 19 out. 2018.

KARAL, J. et al. **A importância da história da matemática no processo de ensino aprendizagem**: um relato da prática docente. Disponível em: <http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:ki7I-dAhSa4J:revista.faifaculdades.edu.br/index.php/pedagogicos/article/download/146/77+&cd=1&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br>. Acesso em: 28 out. 2018.

LIMA, Sérgio F. **Erros e Medições Físicas**. Disponível em: <http://aprendendofisica.pro.br/pmwiki.php/Main/ErrosMedidasFisicaEEtc>. Acesso em: 05 de nov. 2018.

LISBOA, J.; LUCINO, M. A. **A importância da teoria e prática nas aulas de matemática.** Ivaiporã: FIVI, 2015.

MACHADO, N.J. **Matemática por assunto**: noções de cálculo. São Paulo: Scipione, 1988.

MOITA, Graziella Caira Mella; NETO, José Machado Moita. **Estatística aplicada à química**. Teresina: EDUFPI, 2010.

MONICO, J.F.G; et all. Acurácia e precisão: revendo os conceitos de forma acurada. **Revista Boletim Ciências Geodésicas**. Curitiba: v.15, n.3, p.469-483, jul/set, 2009.

MTCTRAT. **Como funciona a têmpera dos metais**. s.d. Altura: 499 pixels. Largura: 869 pixels. 63 Kb. Formato JPEG. Disponível em: <mcttrat.com.br>. Acesso em: 17 jan. 2019.

MUCELIN, Carlos Alberto. **Estatística**. Curitiba: Editora do Livro Técnico, 2010.

NÓBREGA, Danielle Dantas. **Equações Diferenciais ordinárias e algumas aplicações**. Caicó: UFRN, 2016.

OLIVEIRA, Thiago Brandão. **Cálculo diferencial e integral aplicado em alguns sistemas físicos**. Jussara: UEG, 2010.

PROVENZANO, L. F. **Introdução às Equações Diferenciais**: Um roteiro para estudo. Acesso em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAA0-8AE/introducao-a-equacoes-diferenciais>. Acesso em: 21 out. 2018.

ROSA, Adriane Matias. **Relacionar teoria e prática na matemática no ensino fundamental e médio**. Jussara: UEG, 2008.

SANTOS, Genilson. **Aplicações de equações diferenciais em sistemas mecânicos oscilantes acoplados com n graus de liberdade**. Jussara: UEG, 2014.

SILVA, Jair S. F. Sobre o problema da variação de temperatura de um corpo. **Connection Line:** Revista eletrônica do UNIVAG. Várzea Grande, n.5, p.44-55, 2010.

SILVA, Virgulino Ferreira da. **Equações Diferenciais Ordinárias aplicadas em cinética química**. Rio Grande do Sul: FURG, 2008.

SODRÉ, Ulysses. **Equações Diferenciais Ordinárias**: computação, engenharia elétrica e engenharia civil. Notas de aulas. 2003.

SOUZA, M. **Equações Diferenciais**. Florianópolis: UFSC, 2006.

SOUZA, A. L. P. **Aplicações de equações diferenciais em problemas de deflexão de vigas e flambagem de colunas.** Jussara: UEG, 2017.

STEWART, J. **Cálculo**. Tradução Antônio C. M. e Antônio C.G.M. Vol. II. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

TEIXEIRA, Evandro. **Kit de montagem open hardware – montagem & teste**. Disponível em: <https://www.embarcados.com.br/kit-de-automacao-open-hardware-montagem/>. Acesso em: 18 jan. 2019.

VIGILATO, E. L. O. **Estudo e análise e/ou geométrica das soluções e algumas equações diferenciais ordinárias advindas de fenômenos clássicos**. Jussara: UEG, 2017.

WESTFALL, Richard S. A vida de Isaac Newton. **Revista Brasileira de Ensino da Física**, tradução de Vera Ribeiro, vol. 23, n.2, p. 256-258, jun. 2001.

ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais**. vol. 1. tradução Antonio Z., revisão técnica: Antônio P. Jr. São Paulo: Pearson Makron/books, 2001.

ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. tradução Cyro de C. Patarra; revisão técnica Antônio L. Pereira. 3 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.